Colégio Militar do Rio de Janeiro

Concurso de Admissão ao 1º Ano do Ensino Médio – 2011/2012

Prova de Matemática – 16 de Outubro de 2011

Prova

Resolvida

http://estudareconquistar.wordpress.com/

Prova:

http://estudareconquistar.files.wordpress.com/2013/06/cmrj-prova-mat-111.pdf

Gabarito Oficial:

http://estudareconquistar.files.wordpress.com/2013/06/cmrj-gab-mat-111.pdf

CMRJ: http://www.cmrj.ensino.eb.br/Admissao/principal.html

Junho 2013

Questão 1)

$$\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}=\mathrm{X}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2=\mathrm{X}^2$$

$$\frac{5}{2}-2.\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}=\mathrm{X}^2$$

$$\frac{5}{2}-2.\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}=\mathrm{X}^2$$

$$\frac{5}{2}-2.\sqrt{1}+\frac{2}{5}=\mathrm{X}^2$$

$$\frac{5}{2}-2+\frac{2}{5}=\mathrm{X}^2$$

$$\mathrm{X}^2=\frac{25-20+4}{10}$$

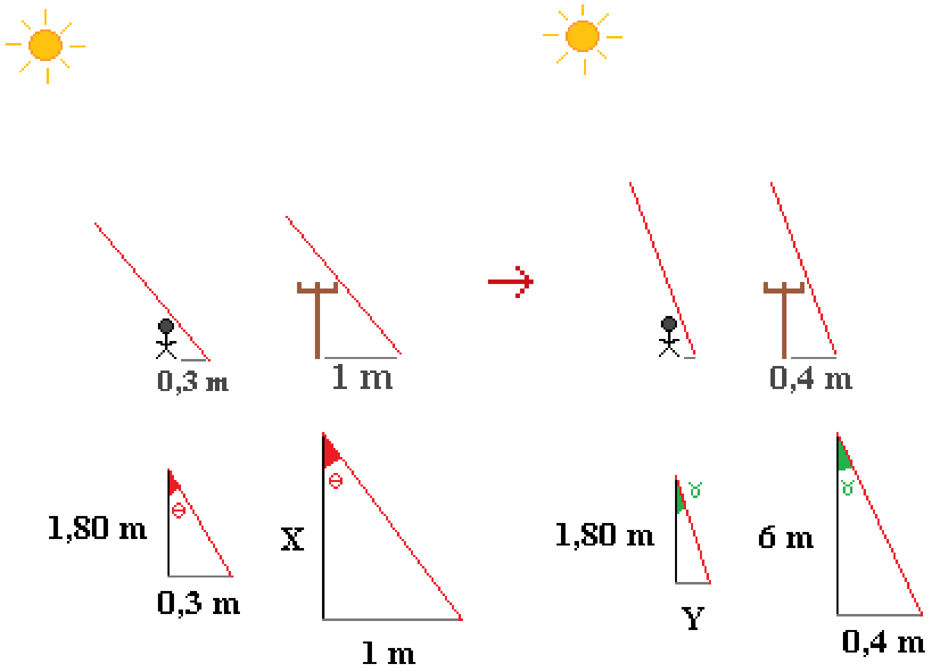
$$\mathrm{X}^2=\frac{9}{10}\rightarrow \mathrm{X}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

- <u>Racionalizando</u>:

$$\mathrm{X}=\frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

<u>Resposta</u>: E

Questão 2)



- <u>Horário Inicial</u>:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{0{,}3}{1{,}8} = \frac{1}{X}$$

$$0{,}3\,X = 1{,}8$$

$$X = 6\text{ m}$$

- <u>Após algumas horas</u>:

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{Y}{1{,}8} = \frac{0{,}4}{6}$$

$$Y = 0{,}12\text{ m} \rightarrow 12\text{ cm}$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 3)

$$\text{Ângulo Interno }(A_i) - \text{Ângulo Externo}(A_e) = 144°$$

$$A_i = \frac{180(n-2)}{n} \qquad A_e = \frac{360}{n}$$

$$\frac{180(n-2)}{n} - \frac{360}{n} = 144$$

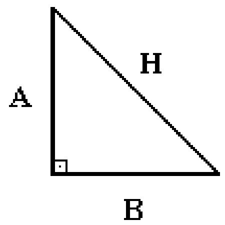
$$180n - 360 - 360 = 144n$$

$$36n = 720$$

$$n = 20$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 4)



$$H^2 = A^2 + B^2$$

- Perímetro:

$$A + B + H = 30 \text{ cm}$$

- Soma dos quadrados:

$$A^2 + B^2 + H^2 = 338 \text{ cm}^2$$

$$H^2 + H^2 = 338 \rightarrow 2H^2 = 338 \rightarrow H^2 = 169$$

$$H = 13 \text{ cm}$$

$$A + B = 17 \text{ cm}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (1)$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad (2)$$

Somando as equações (1) e (2):

$$(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2A^2 + 2B^2$$

$$(17)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2)$$

$$289 + (A - B)^2 = 2(H^2)$$

$$289 + (A - B)^2 = 338$$

$$(A - B)^2 = 49$$

$$A - B = 7$$

Resposta: C

Questão 5)

$$\frac{\frac{x}{x-a}+\frac{a}{x+a}}{\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}}+\frac{2a}{a-\frac{x(x+a)}{x-a}}$$

$$\frac{\frac{x\,(x+a)+a(x-a)}{(x-a).\,(x+a)}}{\frac{x(x+a)-a(x-a)}{(x-a).\,(x+a)}}+\frac{2a}{\frac{a(x-a)-x(x+a)}{x-a}}$$

$$\frac{x\,(x+a)+a(x-a)}{x(x+a)-a(x-a)}+\frac{2a\,(x-a)}{a(x-a)-x(x+a)}$$

$\rightarrow$ <u>Trocando o sinal do denominador</u>:

$$-\frac{x\,(x+a)+a(x-a)}{a(x-a)-x(x+a)}+\frac{2a\,(x-a)}{a(x-a)-x(x+a)}$$

$$\frac{2a\,(x-a)-[x\,(x+a)+a(x-a)]}{a(x-a)-x(x+a)}$$

$$\frac{2a\,(x-a)-x\,(x+a)-a(x-a)}{a(x-a)-x(x+a)}\rightarrow\frac{a\,(x-a)-x\,(x+a)}{a(x-a)-x(x+a)}=1$$

<u>Resposta</u>: A

Questão 6)

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^{-2}}{b^{-1}}\sqrt{\frac{b^{-2}}{a^{-1}}}}}{\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^{-3}}{b^{-5}}}}} \text{x} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{a^{-1}}{b}}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a^{2}}\sqrt{\frac{a}{b^{2}}}}}{\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^{5}}{a^{3}}}}} \text{x} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{ab}}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^{2}}{a^{4}}\frac{a}{b^{2}}}}}{\sqrt[4]{\sqrt{\frac{a^{2}}{b^{2}}\frac{b^{5}}{a^{3}}}}} \text{x} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{ab}}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{a^{3}}}}}{\sqrt[4]{\sqrt{\frac{b^{3}}{a}}}} \text{x} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{ab}}}}$$

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{a^{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\left(\frac{b^{3}}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}} \text{x} \left(\left(\left(\frac{1}{ab}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a^{3}}\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(\frac{b^{3}}{a}\right)^{\frac{1}{8}}} \text{x} \left(\frac{1}{ab}\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$\frac{\frac{1}{a^{\frac{3}{6}}}}{\frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}}} \text{x} \frac{1}{a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}} \rightarrow \frac{1}{a^{\frac{3}{6}}} \text{x} \frac{a^{\frac{1}{8}}}{b^{\frac{3}{8}}} \text{x} \frac{1}{a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}} \rightarrow \frac{1}{\left(a^{\frac{3}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\right)\left(b^{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}\right)} \rightarrow \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{ab}}$$

<u>Resposta</u>: C

Questão 7)

$$(3a + b - 2c)^2 - (2a - 3c)^2 + 5(c - a)(a + c) + b(2a - b)$$
$$(9a^2 + b^2 + 4c^2 + 6ab - 12ac - 4bc) - (4a^2 - 12ac + 9c^2) + (5c^2 - 5a^2) + (2ab - b^2)$$
$$9a^2 + b^2 + 4c^2 + 6ab - 12ac - 4bc - 4a^2 + 12ac - 9c^2 + 5c^2 - 5a^2 + 2ab - b^2$$

$$8ab - 4bc \ \rightarrow \ 8.\frac{7}{18}.\frac{5}{8} - 4.\frac{5}{8}.\frac{2}{9} \ \rightarrow \ \frac{35}{18} - \frac{5}{9} \ \rightarrow \ \frac{35 - 10}{18} \ \rightarrow \ \frac{25}{18}$$

<u>Resposta</u>: E

Questão 8)

$$f(x) = ax + b$$

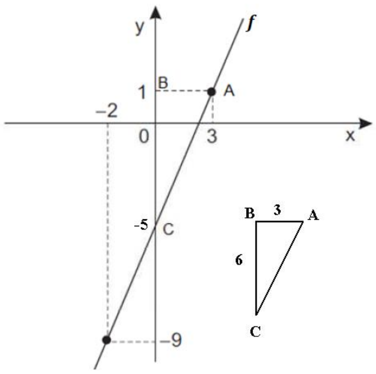
→ Pertencem a essa função os pontos A (3,1) e (-2,-9):

$$1 = 3a + b$$
$$-9 = -2a + b$$
$$5a = 10 \rightarrow a = 2 \text{ e } b = -5$$

$$f(x) = 2x - 5$$

→ Assim, as coordenadas do ponto C, sabendo que nele x = 0, são:

$$f(0) = -5 \ \rightarrow \ C(0, -5)$$



$$\text{Área } \Delta ACB = \frac{\overline{AB}.\overline{BC}}{2} = \frac{3.6}{2} = 9$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 9)

<u>Informações</u>:

- Capacidade de Jean (C_J): $\frac{\text{Nº de envelopes distribuidos por Jean}}{\text{tempo}}$
- Capacidade de Marcelo (C_M): $\frac{\text{Nº de envelopes distribuidos por Marcelo}}{\text{tempo}}$
- Tempo de Jean (t_J)
- Tempo de Marcelo (t_M)

$$t_j = \frac{110}{100} t_M \qquad C_M = \frac{80}{100} C_J$$

$$\text{Total de Envelopes Distribuidos} = C_M . t_M + C_J . t_J$$

$$C_M . t_M + \frac{100}{80} C_M . 1{,}1 t_M = 380$$

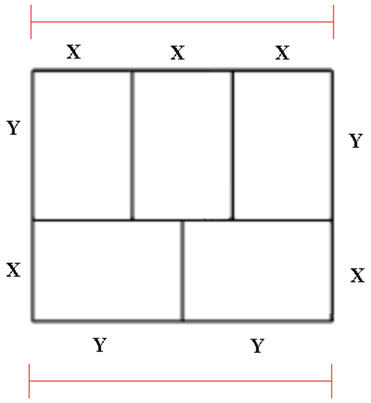
$$C_M . t_M + 1{,}25\ C_M . 1{,}1 t_M = 380$$

$$C_M . t_M + 1{,}375\ C_M . t_M = 380$$

$$2{,}375\ C_M . t_M = 380 \rightarrow C_M . t_M = 160 \text{ envelopes } \rightarrow C_J . t_J = 220 \text{ envelopes}$$

<u>Resposta</u>: A

Questão 10)



$$3X = 2Y$$

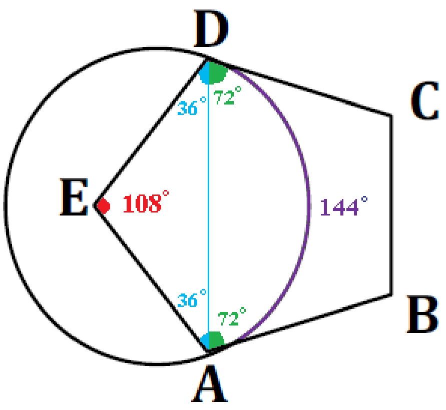
$$\text{Perímetro} \rightarrow 5X + 4Y = 176$$

$$5X + 6X = 176 \ \rightarrow X = 16 \ \text{ e } \ Y = 24$$

$$\text{Área} = X . Y = 16.24 = 384 \text{ cm}^2$$

<u>Resposta</u>: C

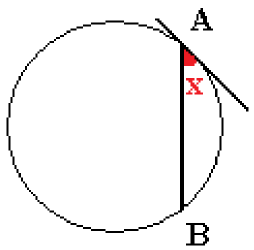
Questão 11)



$\hat{E} \rightarrow$ Ângulo Interno do Pentágono

$$\hat{E} = \frac{180\,(n-2)}{n} = \frac{180.3}{5} = 108°$$

- Segundo a condição:



$$\hat{x} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$72° = \frac{AD}{2} \rightarrow AD = 144°$$

- Calculando o comprimento:

$$\begin{array}{ccc} 360° & \rightarrow & 2\pi r \\ 144° & \rightarrow & X \end{array}$$

$$X = \frac{144.2\pi r}{360} = \frac{288.\pi.5}{360} = 4\pi$$

Resposta: A

Questão 12)

Informações:

- Provas corrigidas por Sobral: S
- Provas corrigidas por Euler: E = 0,6S
- Provas corrigidas por Gil: G = 0,45 (E) → G = 0,45 (0,6S) → 0,27S

$$\text{Total} = S + 0{,}6S + 0{,}27S = 561$$
$$1{,}87S = 561$$
$$S = 300; E = 180; G = 81$$

Resposta: C

Questão 13)

$$x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$
$$x^2 - 6x + 6 + 3 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

→ Fazendo $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = Y$

$$Y^2 + 3 = 4Y$$

$$Y^2 - 4Y + 3 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$
$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow Y_1 = 3 \text{ e } Y_2 = 1$$

Substituindo

$$x^2 - 6x + 6 = 9 \quad \text{ou} \quad x^2 - 6x + 6 = 1$$

→ $x^2 - 6x + 6 = 1$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16$$
$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow X_1 = 5 \text{ e } X_2 = 1$$

$\rightarrow x^2 - 6x + 6 = 9$

$$x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(-3) = 36 + 12 = 48$$

$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{Não são raízes inteiras}$$

$$\text{Soma das raízes} = 5 + 1 = 6$$

Resposta: A

Questão 14)

Irmão	Quantia Inicial	Quantia Após Mudanças
1º	A	A+4
2º	B	B-3
3º	C	$\frac{C}{2}$
4º	D	2D

$$A + B + C + D = 71 \quad (1)$$

$$A + 4 = B - 3 = \frac{C}{2} = 2D \quad (2)$$

Colocando todos da equação (2) em função da variável C:

$$A = \frac{C-8}{2}; \quad B = \frac{C+6}{2}; D = \frac{C}{4}$$

Substituindo na equação (1):

$$\frac{C-8}{2} + \frac{C+6}{2} + C + \frac{C}{4} = 71$$

$$2C - 16 + 2C + 12 + 4C + C = 284$$

$$9C = 288$$

$$C = 32$$

$$\text{O valor final pode ser representado por } \frac{C}{2} = \text{R\$ } 16{,}00$$

Resposta: D

Questão 15)

Informações:

- Oficiais da Marinha → M
- Oficiais da Aeronáutica → A
- Oficiais do Exército → E

- Se todos os oficiais da Aeronáutica se retiram:

$$M = \frac{40}{100}\,(M + E)$$

$$M = 0{,}4M + 0{,}4E$$

$$0{,}6M = 0{,}4E \ \rightarrow E = \frac{6}{4}M$$

- Se todos os oficiais da Marinha se retiram:

$$E = \frac{90}{100}(E + A)$$

$$E = 0{,}9E + 0{,}9A$$

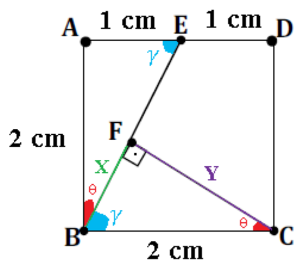
$$0{,}1E = 0{,}9A \ \rightarrow A = \frac{1}{9}E$$

- Substituindo o valor de E:

$$A = \frac{1}{9}\left(\frac{6}{4}M\right) \ \rightarrow A = \frac{1}{6}M$$

Resposta: D

Questão 16)



No ΔABE:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2$$

$$BE^2 = 4 + 1 \rightarrow BE^2 = 5 \rightarrow BE = \sqrt{5}\ \text{cm}$$

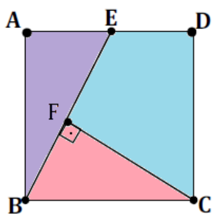
$$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

No ΔBCF:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{BF}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow BF = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}$$

$$BC^2 = BF^2 + CF^2$$

$$2^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + CF^2 \rightarrow CF^2 = 4 - \frac{4.5}{25} \rightarrow CF^2 = 4 - \frac{4}{5} \rightarrow CF^2 = \frac{16}{5} \rightarrow CF = \frac{4\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}$$



$$\text{Área CDEF} = \text{Área Total} - [\text{Área}\ \Delta BCF + \text{Área}\ \Delta ABE]$$

$$\text{Área CDEF} = AB^2 - \left[\frac{AE \times AB}{2} + \frac{BF \times CF}{2}\right]$$

$$\text{Área CDEF} = 2^2 - \left[\frac{1 \times 2}{2} + \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5}}{2}\right]$$

$$\text{Área CDEF} = 4 - \frac{18}{10} \rightarrow \frac{40 - 18}{10} \rightarrow \frac{22}{10} \rightarrow \frac{11}{5}\ \text{cm}^2$$

Resposta: A

Questão 17)

Informações:

- Idade de Paulo → XY
- Idade de Rebeca → YX

$$XY > YX$$

$$(XY)^2 - (YX)^2 = N^2$$

$$(10X + Y)^2 - (10Y + X)^2 = N^2$$

$$(100X^2 + 20XY + Y^2) - (100Y^2 + 20XY + X^2) = N^2$$

$$99X^2 - 99Y^2 = N^2$$

$$X^2 - Y^2 = \frac{N^2}{99}$$

Sabendo que os números X e Y são inteiros e, portanto, $X^2 - Y^2$ também resulta um número inteiro, N^2 deve ser um número divisível por 99.

Múltiplos de 99	Corresponde a algum N^2?	N	Múltiplos de 99	Corresponde a algum N^2?	N
99	Não	-	792	Não	-
198	Não	-	891	Não	-
297	Não	-	990	Não	-
396	Não	-	1089	Sim	33
495	Não	-			
594	Não	-			
693	Não	-			

$$X^2 - Y^2 = \frac{1089}{99}$$

$$X^2 - Y^2 = 11$$

$$(X + Y).(X - Y) = 11$$

$$X + Y = 11$$
$$X - Y = 1$$

$$X = 6 \text{ e } Y = 5$$

$$\text{Idade de Paulo} = 65 \qquad \text{Idade de Rebecca} = 56$$

$$\text{Soma} = 65 + 56 = 121$$

Resposta: C

Questão 18)

$$\text{Receita} = \text{Preço x Unidades Vendidas}$$

→ A cada redução de 10X no valor do produto, vende-se mais 30X unidades, desta forma:

$$\text{Receita} = (150 - 10\text{X})\ \text{x}\ (270 + 30\text{X})$$
$$\text{Receita} = 40500 + 4500\text{X} - 2700\text{X} - 300\text{X}^2$$
$$\text{Receita} = -300\text{X}^2 + 1800\text{X} + 40500$$

→ O valor de X que torna a receita máxima é:

$$\text{X} = \frac{-\text{b}}{2\text{a}} = \frac{-1800}{-600} = 3$$

→ Assim, o valor de venda após sofrer três reduções de R$ 10,00 será:

$$150 - 3\ \text{x}\ 10 = \text{R\$}\ 120{,}00$$

<u>**Resposta**</u>**: D**

Questão 19)

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right).\dots.\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).\dots.\left(1+\frac{1}{200}\right)$$

Completando alguns termos:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right).\dots.\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right).\dots.\left(1+\frac{1}{198}\right)\left(1-\frac{1}{199}\right)\left(1+\frac{1}{200}\right)$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right).\dots.\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right).\dots.\left(\frac{199}{198}\right)\left(\frac{198}{199}\right)\left(1+\frac{1}{200}\right)$$

Observa-se que um termo com denominador par sempre cancela com o termo de denominador ímpar seguinte. No entanto, o ultimo fator não “corta” com nenhum outro.

$$1.1.\dots.1.\dots.1\left(1+\frac{1}{200}\right) = \frac{201}{200}$$

<u>**Resposta**</u>**: E**

Questão 20)

Informações:

- Ângulo: X°
- Quarta parte do Complemento: $\frac{90-X}{4}$
- Suplemento do Dobro da medida do ângulo: 180 – 2X°
- Replemento: 360 - X°

$$3[180-2X]+\frac{90-X}{4}=125$$

$$12[180-2X]+90-X=500$$

$$2160-24X+90-X=500$$

$$-25X=-1750$$

$$X=70°$$

$$\text{Replemento } \rightarrow 360-70=290°$$

Resposta: E