Colégio Militar do Rio de Janeiro

Concurso de Admissão ao 1º Ano do Ensino Médio – 2010/2011

Prova de Matemática – 17 de Outubro de 2010

Prova Resolvida

http://estudareconquistar.wordpress.com/

Prova e Gabarito: http://estudareconquistar.wordpress.com/downloads/

CMRJ: http://www.cmrj.ensino.eb.br/Admissao/principal.html

Setembro 2013

Questão 1)

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I + J = 143$$

→ Retirando os primos {A, B, C}:

$$\frac{D + E + F + G + H + I + J}{7} = 19$$

$$D + E + F + G + H + I + J = 133$$

<u>Assim</u>:

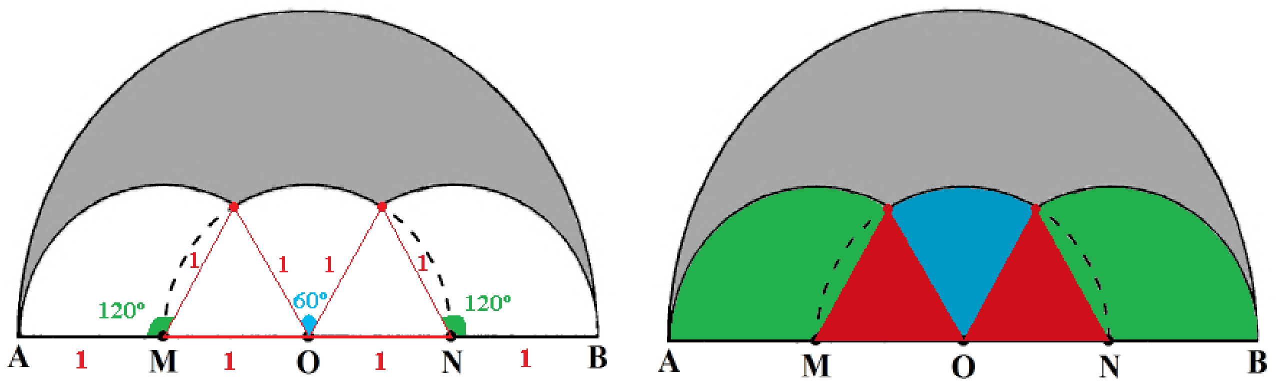
$$A + B + C = 10$$

Números primos menores que 10: {2, 3, 5, 7}

Combinações Possíveis	Resultado
2 + 3 + 5	10
2 + 3 + 7	12
2 + 5 + 7	14
3 + 5 + 7	15

<u>Resposta</u>: B

Questão 2)



→ 2 setores circulares de ângulo 120° e raio 1 cm :

$$\text{Setor } (120°) = \frac{\text{Área do Círculo}}{3} = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Total } (\text{Área Verde}) = 2 \text{ x} \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

→1 setor circular de ângulo 60º e raio 1 cm:

$$\text{Setor } (60°) = \frac{\text{Área do Círculo}}{6} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Total } (\text{Área Azul}) = \frac{\pi}{6}$$

→ 2 triângulos equiláteros de lado 1 cm:

$$\text{Área Triângulo} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Total } (\text{Área Vermelha}) = 2 \text{ x} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área Cinza} = \text{Área (Semi} - \text{Círculo)} - [\text{Área Verde} + \text{Área Azul} + \text{Área Vermelha}]$$

$$\text{Área Cinza} = \frac{\pi(2)^2}{2} - [\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$\text{Área Cinza} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: E

Questão 3)

Somando todos os dias, temos o total de presentes no evento mais duas faltas de cada um dos N alunos:

$$76 + 70 + 72 + 64 + 2N = 5N$$

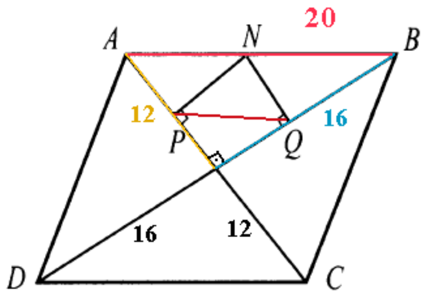
$$3N = 345$$

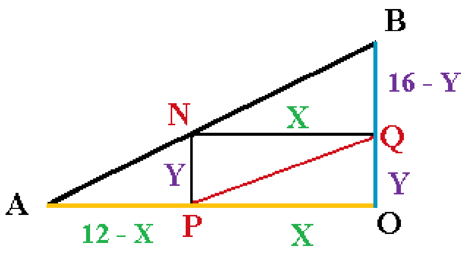
$$N = 115$$

$$\frac{\text{Faltaram na 6ª feira}}{\text{Total}} = \frac{115 - 63}{115} = \frac{52}{115} = 0{,}452 \sim 45\%$$

Resposta: A

Questão 4)





→ Aplicando Pitágoras no ΔAOB:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$$AB^2 = (12)^2 + (16)^2$$

$$AB = 20 \text{ cm}$$

→ Semelhança de triângulos:

$$\Delta NQB \text{ é semelhante ao } \Delta AOB$$

$$\frac{16 - Y}{16} = \frac{X}{12}$$

$$192 - 12Y = 16$$

$$Y = \frac{192 - 16X}{12} = 16 - \frac{4X}{3}$$

→ Aplicando Pitágoras no ΔPOQ:

$$PQ^2 = PO^2 + QO^2$$

$$PQ^2 = X^2 + Y^2$$

$$PQ^2 = X^2 + \left(16 - \frac{4X}{3}\right)^2$$

$$PQ^2 = X^2 + 256 - \frac{128X}{3} + \frac{16X^2}{3}$$

$$PQ^2 = f(x) = \frac{25X^2}{9} - \frac{128X}{3} + 256$$

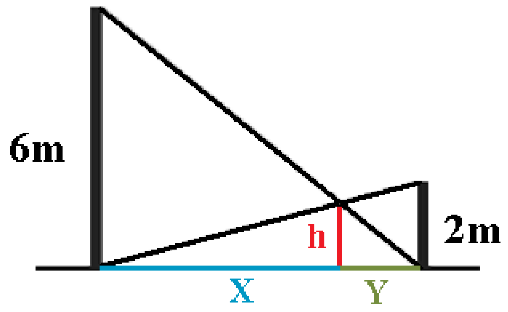
Assim, o valor mínimo de PQ²:

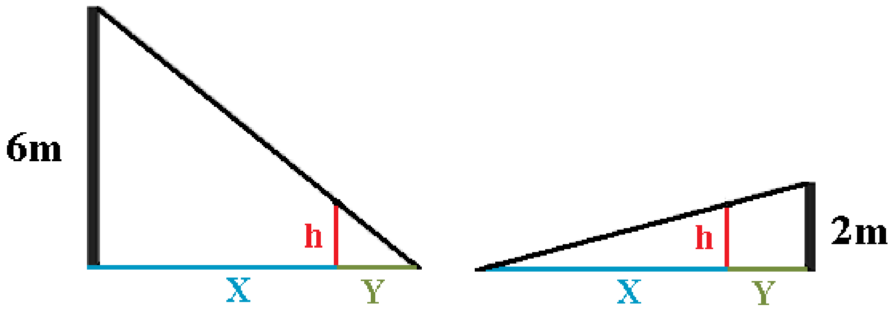
$$PQ^2{}_{min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[b^2 - 4ac]}{4a} = \frac{-[\left(\frac{128}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{25}{9}\right)(256)]}{4 \text{ x } \frac{25}{9}} = \frac{-\left[\frac{16384}{9} - \frac{25600}{9}\right]}{\frac{100}{9}} = \frac{\frac{9216}{9}}{\frac{100}{9}} = \frac{9216}{100}$$

$$PQ^2{}_{min} = \frac{9216}{100} \rightarrow PQ_{min} = \sqrt{\frac{9216}{100}} = \frac{96}{10} = 9{,}6 \text{ cm}$$

<u>**Resposta**</u>**: C**

Questão 5)





→ Semelhança de Triângulo:

<u>Triângulo Maior</u>

$$\frac{6}{h} = \frac{X + Y}{Y}$$

$$6Y = h\ (X + Y)$$

<u>Triângulo Menor</u>

$$\frac{2}{h} = \frac{X + Y}{X}$$

$$2X = h\ (X + Y)$$

→ Dividindo:

$$\frac{6Y}{2X} = \frac{h\ (X + Y)}{h\ (X + Y)}$$

$$6Y = 2X\ \rightarrow\ 3Y = X$$

$$\frac{6}{h} = \frac{3Y + Y}{Y} \rightarrow \frac{6}{h} = 4\ \rightarrow h = \frac{3}{2}\ m\ (1{,}5\ m)$$

<u>Resposta</u>: D

Questão 6)

→ Proporção da seção A:

$$\frac{A}{A+B+C+D+E}=\frac{43}{100}\rightarrow A=43\,\frac{(A+B+C+D+E)}{100}$$

→ Após a saída de “x” professores de A:

$$\frac{A-x}{A-x+B+C+D+E}=\frac{40}{100}$$

$$100A-100X=40\,(A-x+B+C+D+E)$$

$$100A-100X=-40X+40(A+B+C+D+E)$$

$$100A=60X+40(A+B+C+D+E)$$

$$100\left[43\,\frac{(A+B+C+D+E)}{100}\right]=60X+40(A+B+C+D+E)$$

$$43(A+B+C+D+E)=60X+40(A+B+C+D+E)$$

$$60X=3(A+B+C+D+E)$$

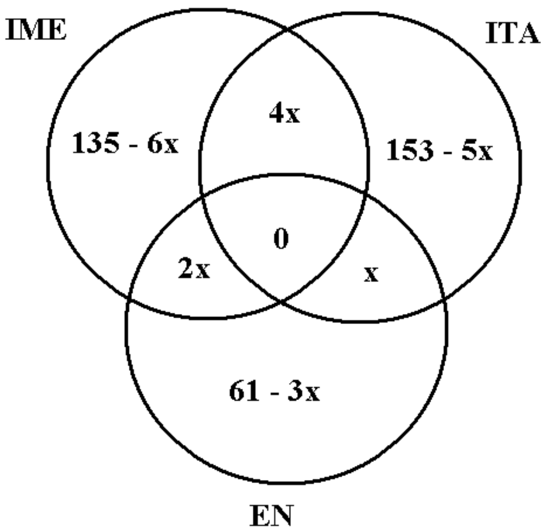
$$\frac{X}{A+B+C+D+E}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}=0{,}05=5\%$$

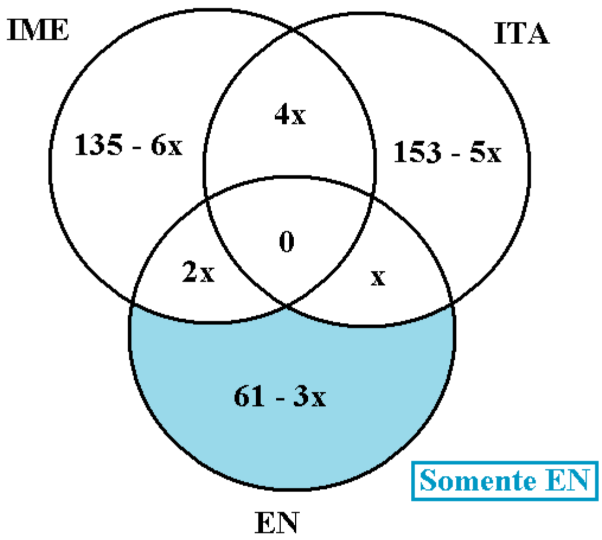
<u>Resposta</u>: D

Questão 7)

<u>Informações</u>:

- Total de alunos: 300





$$135 - 6x + 4x + 153 - 5x + 2x + 0 + x + 61 - 3x = 300$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

$$\text{Somente EN} = 61 - 3x = 61 - 3\,(7) = 61 - 21 = 40$$

<u>Resposta</u>: C

Questão 8)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc=acb$$

$$2abc+a^2c+a^2b+b^2c+ab^2+bc^2+ac^2=0$$

$$b[a^2+2ac+c^2]+b^2(a+c)+ac(a+c)=0$$

$$b(a+c)^2+b^2(a+c)+ac(a+c)=0$$

$$[a+c].[b(a+c)+b^2+ac]=0$$

$$[a+c].[b(a+c+b)+ac]=0$$

$\rightarrow a+c=0$

$$a=-c$$

$\rightarrow b(a+c+b)+ac=0$

$$ac=-b(a+c+b)$$

$$a=-b$$

$$c=a+c+b\ \rightarrow a+b=0\ \rightarrow a=-b$$

ou

$$ac=-b(a+c+b)$$

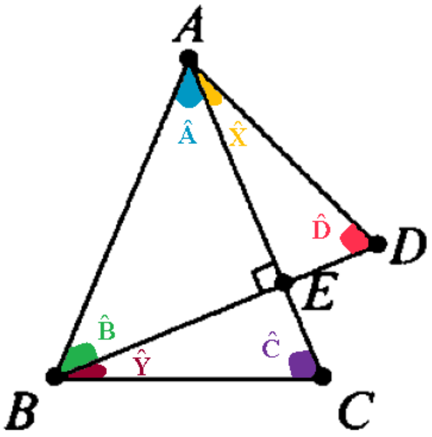
$$c=-b$$

$$a=a+c+b\ \rightarrow c+b=0\rightarrow c=-b$$

$$a=-c, a=-b, c=-b$$

<u>**Resposta**</u>**: E**

Questão 9)



$$\hat{C} + \hat{Y} = 90$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 90$$

$$\hat{X} + \hat{D} = 90$$

→ ABC e ABD são isósceles:

$$\hat{D} = \hat{A} + \hat{X}$$

$$\hat{C} = \hat{B} + \hat{Y}$$

→ Somando as 5 parcelas:

$$\hat{C} + \hat{Y} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{X} + \hat{D} + \hat{D} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{X} + \hat{B} + \hat{Y} + 90 + 90 + 90$$

$$\hat{C} + \cancel{\hat{Y}} + \cancel{\hat{A}} + \cancel{\hat{B}} + \cancel{\hat{X}} + \hat{D} + \hat{D} + \hat{C} = \cancel{\hat{A}} + \cancel{\hat{X}} + \cancel{\hat{B}} + \cancel{\hat{Y}} + 90 + 90 + 90$$

$$\hat{C} + \hat{D} + \hat{D} + \hat{C} = 90 + 90 + 90$$

$$2\hat{C} + 2\hat{D} = 270$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 135$$

<u>Resposta</u>: D

Questão 10)

→ Convertendo a extensão do litoral brasileiro em estádios:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ estádio} & \rightarrow & 0{,}185 \text{ km} \\ X & \rightarrow & 7492{,}5 \text{ km} \end{array}$$

$$X = \frac{7492{,}5}{0{,}185} = 40.500 \text{ estádio}$$

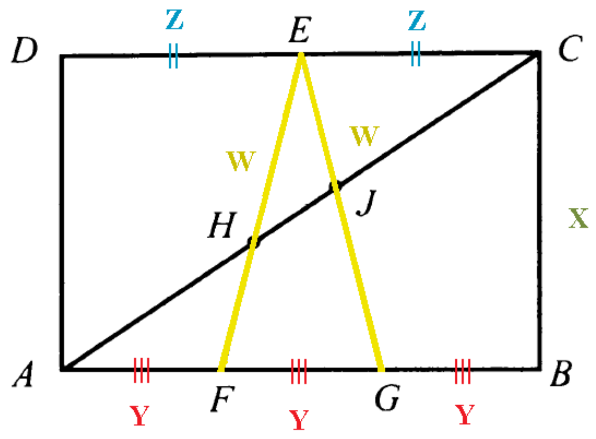
→ Dias necessários para percorrer a distância:

$$\begin{array}{ccc} 9 \text{ dias} & \rightarrow & 4860 \text{ estádio} \\ Y & \rightarrow & 40500 \text{ estádio} \end{array}$$

$$Y = \frac{40500 \text{ x } 9}{4860} = 75 \text{ dias}$$

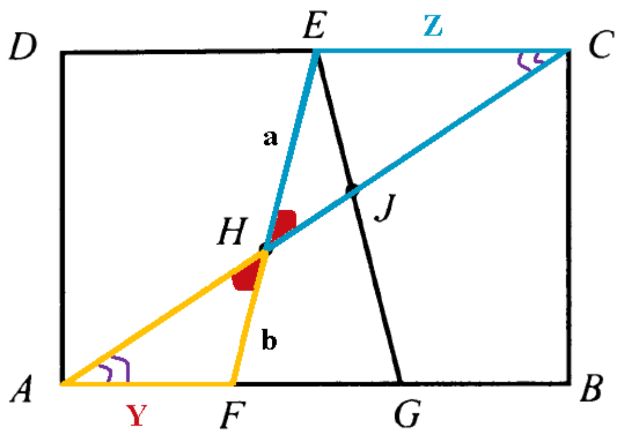
<u>Resposta</u>: C

Questão 11)



$$2Z = 3Y \rightarrow Z = \frac{3Y}{2}$$

$$\text{Área ABCD} = X.3Y = 70 \rightarrow XY = \frac{70}{3}$$

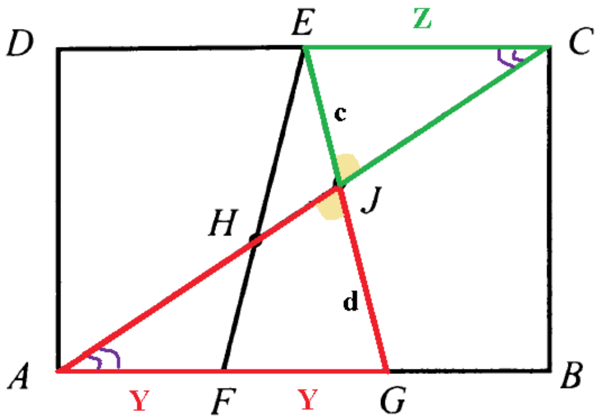


→ Semelhança ΔEHC e ΔAHF

$$\frac{a}{b} = \frac{Z}{Y}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{3Y}{2}}{Y} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

$$b = \frac{2a}{3}$$



→ Semelhança ΔEJC e ΔAJC

$$\frac{c}{d} = \frac{Z}{2Y}$$

$$\frac{3Y}{2}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\frac{3Y}{2}}{2Y} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$$

$$d = \frac{4c}{3}$$

→ EFG é isósceles:

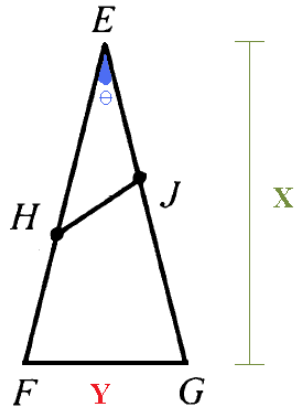
$$EF = EG = W$$

$$a + b = c + d = W$$

$$a + \frac{2a}{3} = c + \frac{4c}{3} = W$$

$$\frac{5a}{3} = \frac{7c}{3} = W$$

→ Áreas:



$$\text{Área } \Delta \text{ EFG} = \frac{\text{Base. Altura}}{2} = \frac{\text{Y. X}}{2} = \frac{70}{6}$$

$$\text{Área } \Delta \text{ EFG} = \frac{\text{EF. EG}}{2} \text{ . sen}\theta = \frac{70}{6} \rightarrow \text{W}^2\text{. sen}\theta = \frac{70}{3}$$

$$\text{W}^2\text{. sen}\theta = \frac{70}{3}$$

$$\text{Área}\Delta \text{ EHJ} = \frac{\text{EH. EJ}}{2}\text{. sen}\theta \rightarrow \frac{\text{a. c}}{2}\text{. sen}\theta$$

$$\frac{\text{a. c}}{2}\text{. sen}\theta = \frac{\frac{3\text{W}}{5}\cdot\frac{3\text{W}}{7}}{2}\text{. sen}\theta = \frac{9\text{W}^2}{70}\text{. sen}\theta = \frac{9}{70}\cdot\frac{70}{3} = 3 \text{ cm}^2$$

<u>**Resposta**</u>**: C**

Questão 12)

$$\frac{3^{n-2}+3^{n-1}+3^{n}+3^{n+1}}{2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}}=\frac{10.7^{n+1}+2.7^{n}}{7^{n+2}-37.7^{n}}$$

$$\frac{3^{n-2}\,[1+3+3^{2}+3^{3}]}{2^{n-2}[1+2+2^{2}+2^{3}]}=\frac{2.7^{n}[5.7+1]}{7^{n}\,[7^{2}-37]}$$

$$\frac{3^{n-2}\,[40]}{2^{n-2}[15]}=\frac{2[36]}{[12]}$$

$$\frac{3^{n-2}}{2^{n-2}}=\frac{2[36][15]}{[12][40]}$$

$$\frac{3^{n-2}}{2^{n-2}}=\frac{9}{4}=\frac{3^{2}}{2^{2}}$$

$$n-2=2$$

$$n=4$$

<u>Resposta</u>: E

Questão 13)

<u>Quantia paga por cada amigo</u>:

$$\frac{600}{N}=X$$

<u>Quantia paga por cada amigo (excetuando os dois que não pagaram)</u>:

$$\frac{600}{N-2}=X+10$$

→ Dividindo:

$$\frac{N-2}{N}=\frac{X}{X+10}$$

$$NX-2X+10N-20=NX$$

$$X=5N-10$$

$$600=N.(5N-10)$$

$$N^{2}-2N-120=0$$

$$N=12\quad e\quad X=50$$

→ Depósito:

$$\text{Quantia depositada} = \text{Quantia pagas pelos demais} + \text{Multa}$$

$$\text{Quantia depositada} = (X + 10) + \frac{10}{100}\ (X + 10)$$

$$\text{Quantia depositada} = (60) + \frac{10}{100}\ (60) = 66$$

$$\text{Total (2 pessoas)} = 2 \text{ x } 66 = \text{R\$ } 132{,}00$$

Resposta: A

Questão 14)

Informações:

$-$ Ingresso: R$ 150,00
$-$ Nº de Espectadores: N

$$\text{Renda do Espetáculo: (Preço do Ingresso). (Nº de Espectadores)}$$

$$\text{Renda do Espetáculo: } 150\text{N}$$

Após a promoção:

$- \text{Ingresso}_{\text{final}}: 150 - 150X = 150\ (1 - X)$

$- \text{Nº de Espectadores}_{\text{final}}: N + \dfrac{50}{100}N = 1{,}5N$

$- \text{Renda do Espetáculo}_{\text{final}}: 150N + \dfrac{25}{100}\ 150N = 187{,}5N$

$$\text{Renda do Espetáculo}_{\text{final}} = (\text{Ingresso}_{\text{final}}).\ (\text{Nº de Espectadores}_{\text{final}})$$

$$187{,}5N = [150\ (1 - X)].\ [1{,}5N]$$

$$\frac{187{,}5}{1{,}5} = [150\ (1 - X)]$$

$$(1 - X) = \frac{187{,}5}{1{,}5 \text{ x } 150}$$

$$1 - X = 0{,}833$$

$$X = 0{,}166 = \frac{16{,}6}{100} = 16{,}6\%$$

Resposta: B

Questão 15)

Informações:

$- \text{Recursos} - \text{Claudete: } \dfrac{x}{35}$

$- \text{Recursos} - \text{Alexandre:} \dfrac{x}{40}$

$- \text{Nº de recursos: N}$

$- \text{Tempo}_{\text{Alexandre}} = 3\text{h } 30 \text{ min} = 210 \text{ min}$

$$\text{Total de Recursos} \rightarrow \text{N} = \frac{x}{35} + \frac{x}{40} = \frac{15x}{280} \rightarrow x = \frac{280\text{N}}{15}$$

$$\text{Recursos}_{\text{Claudete}}\text{:}\frac{8\text{N}}{15} \qquad \text{Recursos}_{\text{Alexandre}}\text{:}\frac{7\text{N}}{15}$$

$$\text{Capacidade}_{\text{Alexandre}} = \frac{\text{Recursos}_{\text{Alexandre}}}{\text{Tempo}_{\text{Alexandre}}} = \frac{\frac{7\text{N}}{15}}{\text{Tempo}_{\text{Alexandre}}} = \frac{7\text{N}}{15.\,\text{Tempo}_{\text{Alexandre}}}$$

$$\text{Capacidade}_{\text{Alexandre}} = \frac{75}{100}\,(\text{Capacidade}_{\text{Claudete}}) \rightarrow \frac{7\text{N}}{15.\,\text{Tempo}_{\text{Alexandre}}} = \frac{75}{100}\left(\frac{\text{Recursos}_{\text{Claudete}}}{\text{Tempo}_{\text{Claudete}}}\right)$$

$$\frac{7\text{N}}{15.\,\text{Tempo}_{\text{Alexandre}}} = \frac{75}{100}\left(\frac{8\text{N}}{15.\,\text{Tempo}_{\text{Claudete}}}\right)$$

$$\text{Tempo}_{\text{Claudete}} = \frac{75\,.\,8.\,\text{Tempo}_{\text{Alexandre}}}{7.\,100} = \frac{75.8.210}{7.\,100} = 180 = 3\text{h}$$

→ Início da tarefa:

$$\frac{11}{32}\text{ dia} = \frac{11}{32}\text{ x } 24\text{ h} = \frac{11}{32}\text{ x } 24 \text{ x } 60 \text{ minutos} = 495 \text{ minutos}$$

$$495 \text{ minutos} = 8 \text{ minutos e } 15 \text{ min}$$

$$\text{Claudete completou a sua parte às: } 8\text{ h } 15\text{ min} + 3\text{h} = 11\text{h } 15\text{ min}$$

Resposta: C

Questão 16)

$$20°C < T_A < 40°C$$

$$T_E = 8{,}5 + 0{,}8T_A$$

→ Menor valor de T_A

$$T_{E_{mín}} = 8{,}5 + 0{,}8\,(21) = 25{,}3$$

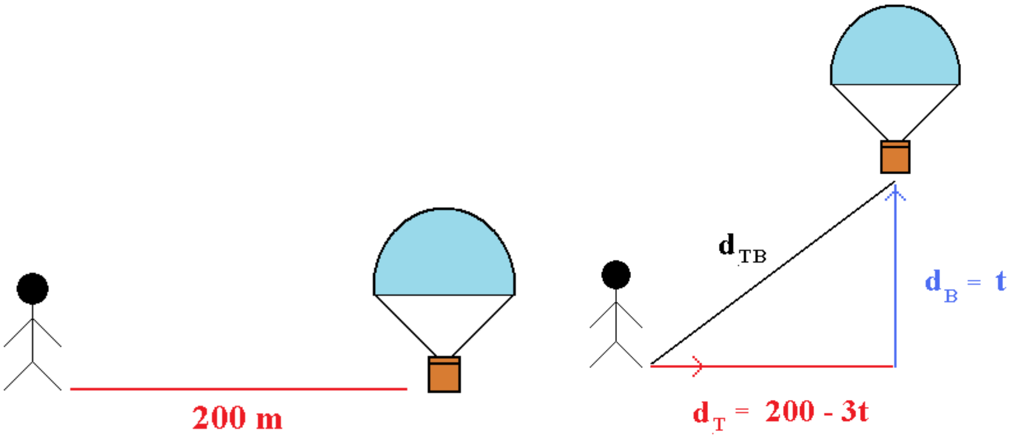
→ Maior valor de T_A

$$T_{E_{max}} = 8{,}5 + 0{,}8\,(39) = 39{,}7$$

$$\frac{T_{E_{max}}}{T_{E_{mín}}} = \frac{39{,}7}{25{,}3} = 1{,}569 \ \rightarrow 1{,}57$$

<u>Resposta</u>: A

Questão 17)



→ Distâncias percorridas:

$$\text{Distância} = \text{Distância}_{\text{inicial}} + \text{velocidade}.\text{tempo}$$

<u>Turista Ademar</u>:

$$d_T = 200 - 3t$$

A distância é negativa, pois ele está em sentido contrário ao convencional, ou seja, indo da esquerda para a direita diminuindo a distância entre ele e o balão.

<u>Balão</u>:

$$d_B = 0\ (\text{partiu do chão}) + t$$

$$(d_{TB})^2 = (d_T)^2 + (d_B)^2$$

$$(d_{TB})^2 = (200 - 3t)^2 + (t)^2$$

$$(d_{TB})^2 = 40000 - 1200t + 9t^2 + (t)^2$$

$$(d_{TB})^2 = 10t^2 - 1200t + 40000$$

$$(d_{TB})^2{}_{\text{Min}} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[b^2 - 4ac]}{4a}$$

$$(d_{TB})^2{}_{\text{Min}} = \frac{-[1440000 - 4(10)(40000)]}{4(10)} = \frac{160000}{40} = 4000$$

$$(d_{TB})^2{}_{\text{Min}} = 4000 \ \rightarrow d_{TB_{\text{Min}}} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10}\ \text{m}$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 18)

$$3(mx - p + 1) - 4x = 2(-px + m - 4)$$

$$3mx - 3p + 3 - 4x = -2px + 2m - 8$$

$$3mx - 4x + 2px = 2m - 8 + 3p - 3$$

$$x\,(3m - 4 + 2p) = 2m + 3p - 11$$

Para que qualquer valor de x satisfaça essa equação, devemos ter a forma:

$$x.0 = 0$$

$$3m - 4 + 2p = 0 \quad \rightarrow 3m + 2p = 4$$

$$2m + 3p - 11 = 0 \rightarrow 2m + 3p = 11$$

$$\begin{matrix} 3m + 2p = 4 \\ 2m + 3p = 11 \end{matrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$p = 5 \text{ e } m = -2$$

$$\text{Soma} = -2 + 5 = 3$$

Resposta: A

Questão 19)

A) **VERDADEIRO**

B) **FALSO**

$$\left(\sqrt{-3}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

C) **VERDADEIRO**

D) **VERDADEIRO**

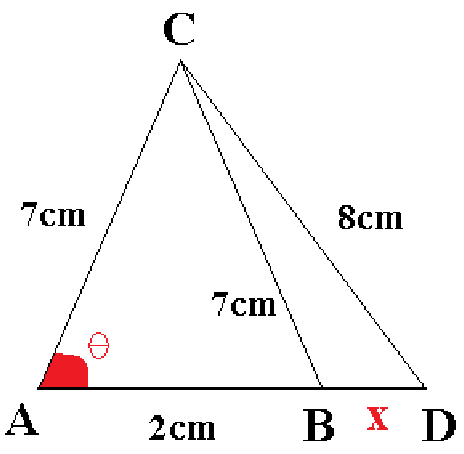
$$\text{Média} = \frac{-5 - 2 - 4}{3} = -\frac{11}{3} \quad (\text{não é inteiro})$$

$$\text{A média será necessariamente negativa, mas não necessivamente inteira}$$

E) **VERDADEIRO**

Resposta: B

Questão 20)



Lei dos cossenos ΔABC, angulo θ:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB).\cos\theta$$

$$7^2 = 7^2 + 2^2 - 2(7)(2).\cos\theta$$

$$2(7)(2).\cos\theta = 4$$

$$\cos\theta = \frac{1}{7}$$

Lei dos cossenos ΔACD, angulo θ:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2(AC)(2+x).\cos\theta$$

$$8^2 = 7^2 + (2+x)^2 - 2(7)(2+x).\cos\theta$$

$$64 = 49 + 4 + 4x + x^2 - 2(7)(2+x)\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm 8}{2} \rightarrow x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -5$$

<u>Resposta</u>: A