Colégio Militar do Rio de Janeiro

Concurso de Admissão ao 1º ano do Ensino Médio – 2013/2014

Prova de Matemática – 6 de Outubro de 2013

Prova Resolvida

http://estudareconquistar.wordpress.com/

Prova e Gabarito: http://estudareconquistar.wordpress.com/downloads/

CMRJ: http://www.cmrj.ensino.eb.br/Admissao/principal.html

Outubro 2013

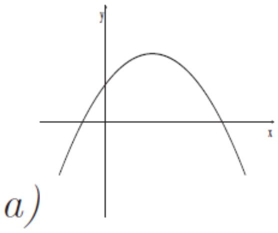
Questão 1)

<u>Informações</u>:

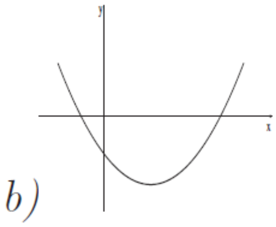
→ Se $\Delta > 0$: A função tem raízes reais distintas, ou seja, corta o eixo x em dois locais.

→ a < 0: Concavidade para baixo

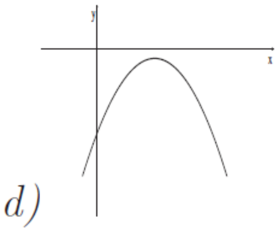
→ c < 0: A função corta o eixo y em um valor negativo [f(0) = c → f(0) < 0]



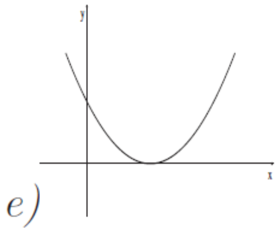
Corta y em valor positivo - f(0) > 0



Concavidade para cima



Não corta o eixo X



- **Corta em um único ponto** - $\Delta = 0$ **(duas raizes com o mesmo valor)**
- **Concavidade para cima**
- **Corta y em valor positivo - f(0) > 0**

<u>Resposta</u>: C

Questão 2)

<u>Informações</u>:

- Capacidade do recipiente: 5 dl
- Massa de açúcar: 300 cg

→ Convertendo Unidades:

$$5 \text{ dl} \rightarrow 0{,}5 \text{ l} \rightarrow 0{,}5 \text{ dm}^3 \rightarrow 500 \text{ cm}^3$$

$$300 \text{ cg} \rightarrow 3000 \text{ mg}$$

$$\text{Concentração da Mistura} = \frac{\text{Massa de Açúcar}}{\text{Volume}} = \frac{3000 \text{ mg}}{500 \text{ cm}^3} = 6\,\frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 3)

	Irmão	Benjamin
Passado	A	B
	$\downarrow x$	$\downarrow x$
Presente	B	C

$$\boxed{C = 3A}$$

A idade atual do irmão é de B anos. Quando Benjamin tinha essa mesma idade, o irmão tinha A anos. Portanto, a idade atual de Benjamin é C = 3A. Assim:

$$\begin{cases} A + x = B \\ B + x = C = 3A \end{cases}$$

$$A - B = B - 3A$$
$$4A = 2B \;\rightarrow \mathbf{B = 2A}$$

	Irmão	Benjamin
Passado	A	2A
	$\downarrow A$	$\downarrow A$
Presente	2A	3A

→ Não é possível determinar qual a idade atual dos irmão ou a diferença de idade entre eles.

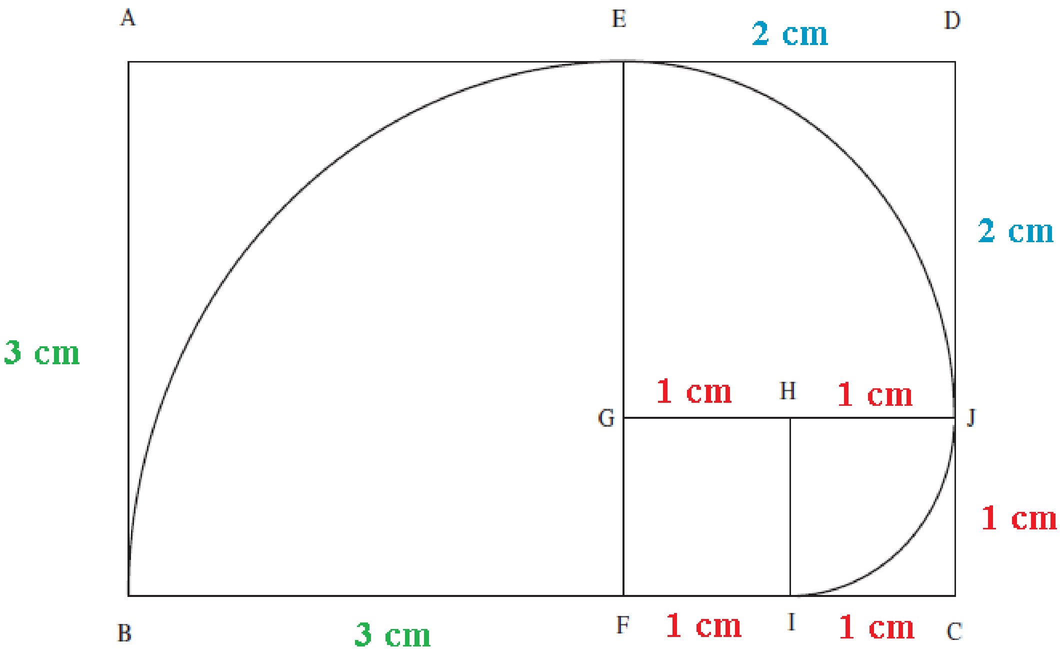
Quando o irmão tiver a idade de Benjamin, o que acontecerá em A anos, a soma das idades será:

	Irmão	Benjamin	
Passado	A	2A	
	$\downarrow A$	$\downarrow A$	
Presente	2A	3A	
	$\downarrow A$	$\downarrow A$	
Futuro	3A	4A	Soma = 7A

$$7A \rightarrow \text{multiplo de } 7$$

Resposta: C

Questão 4)



→ Arco BE:

$$\text{Arco BE} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ de circunferência de raio 3 cm}$$

$$\text{Arco BE} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi 3}{4} = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}$$

→ Arco EJ:

$$\text{Arco EJ} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ de circunferência de raio 2 cm}$$

$$\text{Arco EJ} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi 2}{4} = \pi \text{ cm}$$

→ Arco JI:

$$\text{Arco JI} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ de circunferência de raio 1 cm}$$

$$\text{Arco JI} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi 1}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Comprimento total da espiral} = \frac{3\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 3\pi \text{ cm}$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 5)

<u>Informações</u>:

- Total de alunos: 20
- Soma das alturas dos 19 alunos da turma (exceto Luiz): X
- Altura de Luiz: L
- Altura de Antônio: A

→ Média da Turma:

$$\frac{\text{Soma das Alturas}}{\text{Total de Alunos}} = 1{,}5$$

$$\frac{\mathrm{X} + \mathrm{L}}{20} = 1{,}5$$

$$\mathrm{X} + \mathrm{L} = 30$$

→ Média da turma sem Luiz:

$$\frac{\text{Soma das Alturas} - \text{Altura de Luiz}}{\text{Total de Alunos} - \text{Luiz}} = 1{,}5 + 2\% \text{ de } 1{,}5$$

$$\frac{\mathrm{X}}{19} = 1{,}53$$

$$\mathbf{X = 29{,}07\ m}$$

$$\mathrm{L} = 30 - \mathrm{X} = 30 - 29{,}07 = \mathbf{0{,}93\ m}$$

→ Média da turma com Antônio:

$$\frac{\text{Soma das Alturas} + \text{Antônio}}{\text{Total de Alunos} + \text{Antônio}} = 1{,}5 - 2\% \text{ de } 1{,}5$$

$$\frac{\mathrm{X} + \mathrm{L} + \mathrm{A}}{21} = 1{,}47$$

$$\mathrm{X} + \mathrm{L} + \mathrm{A} = 30{,}87\ \mathrm{m}$$

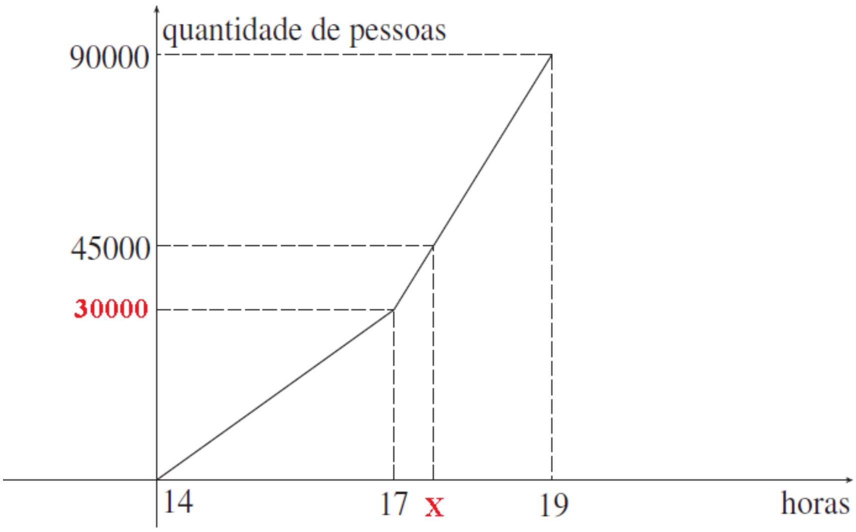
$$\mathrm{A} = 30{,}87 - 29{,}07 - 0{,}93 = \mathbf{0{,}87m}$$

$$\text{Diferença} = \mathrm{L} - \mathrm{A} = 0{,}93 - 0{,}87 = 0{,}06\ \mathrm{m}\ \rightarrow 6\ \mathrm{cm}$$

<u>Resposta</u>: A

Questão 6)

Nas três primeiras horas entraram 10.000 torcedores por hora, totalizando 30.000 às 17h:



Nas duas horas seguintes (17 às 19h), o número de torcedores passou de 30.000 para 90.000:

$$\text{Vazão de entrada} = \frac{\text{Nº torcedores}}{\text{Tempo}} = \frac{90000 - 30000}{2} = 30000\,\frac{\text{torcedores}}{\text{hora}}$$

Assim, com todos os portões abertos entram 30.000 torcedores por horas. Para que chegue a 45.000:

$$\begin{array}{ccc} 30.000 & \rightarrow & 1\text{h} \\ 15.000 & \rightarrow & \text{Y} \end{array}$$

$$\text{Y} = \frac{15000}{30000} = 0{,}5\ \text{h} = 30\ \text{min}$$

$$\text{X} = 17\text{h}\ 30\ \text{min}$$

<u>**Resposta**</u>**: D**

Questão 7)

A) **FALSO**

Entre 6 e 7 existem infinitos números irracionais

B) **FALSO**

$$\mathrm{A} = \pi \ \text{ e } \mathrm{B} = -\pi$$

$$\text{Soma} = \pi - \pi = 0 \ (\text{Não é irracional})$$

C) **FALSO**

As dizimas periódicas podem ser representadas por uma fração geratriz, formada pela divisão de dois números inteiros.

D) **FALSO**

$$\pi \text{ é um número irracional}$$

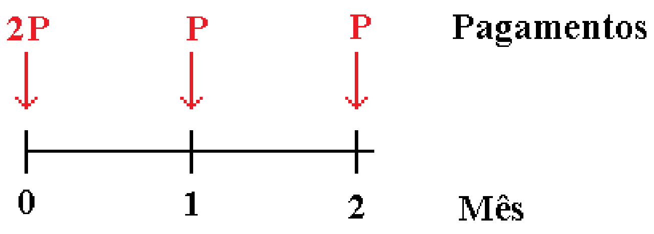
E) **VERDADEIRO**

Resposta: E

Questão 8)

Informações:

- Preço do computador: R$ 4520,00



→ A entrada no valor de 2P é paga, resultando em um saldo devedor de:

$$\text{Saldo Devedor}_0 = 4520 - 2P$$

→ Primeira prestação:

A primeira prestação é composta pela amortização, valor que será abatido do saldo devedor, e pelos juros.

$$\text{Prestação}_1 = \text{Amortização}_1 + \text{Juros}_1 = P$$

$$\text{Juros}_1 = 10\% \text{ do Saldo Devedor}_0$$

$$\text{Juros}_1 = \frac{10}{100}(4520 - 2P) = 452 - 0{,}2P$$

Substituindo:

$$\text{Amortização}_1 + 452 - 0{,}2P = P$$

$$\text{Amortização}_1 = 1{,}2P - 452$$

Assim, do saldo devedor inicial será abatida a amortização, resultando no saldo devedor do primeiro mês:

$$\text{Saldo Devedor}_1 = \text{Saldo Devedor}_0 - \text{Amortização}_1$$

$$\text{Saldo Devedor}_1 = [4520 - 2P] - [1{,}2P - 452] = 4972 - 3{,}2P$$

→ Segunda prestação:

$$\text{Prestação}_2 = \text{Amortização}_2 + \text{Juros}_2 = P$$

$$\text{Juros}_2 = 10\% \text{ do Saldo Devedor}_1$$

$$\text{Juros}_2 = \frac{10}{100}(4972 - 3{,}2P) = 497{,}2 - 0{,}32P$$

<u>Substituindo</u>:

$$\text{Amortização}_2 + 497{,}2 - 0{,}32P = P$$

$$\text{Amortização}_2 = 1{,}32P - 497{,}2$$

$$\text{Saldo Devedor}_2 = \text{Saldo Devedor}_1 - \text{Amortização}_2$$

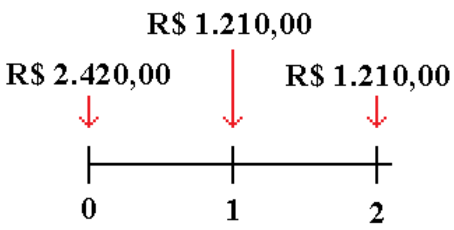
$$\text{Saldo Devedor}_2 = [4972 - 3{,}2P] - [1{,}32P - 497{,}2] = 5469{,}2 - 4{,}52P$$

Mês	**Saldo Devedor**	**Prestação**	
		Amortização	**Juros**
0	4520 − 2P	0	0
1	4972 − 3,2P	1,2P − 452	452 − 0,2P
2	5469,2 − 4,52P	1,32P − 497,2	497,2 − 0,32P

Como não há mais prestações, o saldo devedor tem que ser quitado na última prestação:

$$\text{Saldo Devedor}_2 = 0$$

$$5469{,}2 - 4{,}52P = 0 \quad \rightarrow P = \frac{5469{,}2}{4{,}52} = \text{R\$ } 1210{,}00$$

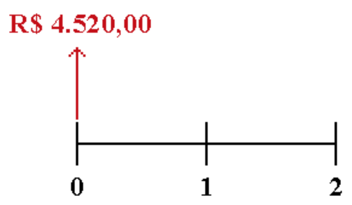


$$\text{Soma} = 2420 + 1210 + 1210 = \text{R\$ } 4.840{,}00$$

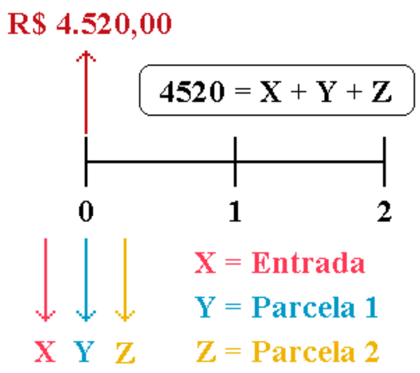
<u>Resposta</u>: B

Resolução Alternativa

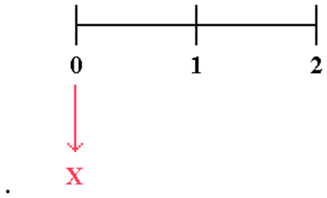
→ Comprando o computador à vista, Magda faria um único pagamento no momento da compra:



→ Se ela decidir parcelar, o valor à vista será divido. No caso da questão, essa divisão é feita em uma entrada e duas parcelas.



1) A entrada é paga no momento da compra

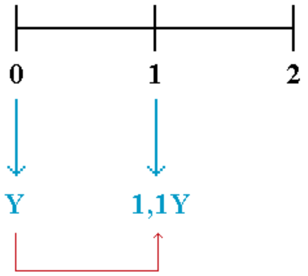


2) A primeira parcela só será paga após 1 mês da compra. Nesse caso, terá juros. Então, Magda irá pagar a parcela Y mais 10% de juros.

$$\text{Parcela Y (Após 1 mês)} = \text{Y} + 10\% \text{ de Y} = \text{Y} + \frac{10}{100}\text{ Y} = 1{,}1\text{ Y}$$

Pela fórmula de juros compostos:

$$\text{Montante (M)} = (\text{Capital Inicial}) \times (1 + i)^n$$
$$\text{Parcela Y (Após 1 mês)} = Y \times (1 + 0{,}1)^1$$
$$\text{Parcela Y (Após 1 mês)} = 1{,}1Y$$



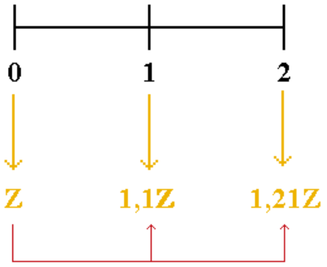
3) A segunda parcela será paga após 2 meses de compra. Assim, a parcela que Magda irá pagar corresponde à parcela Z mais 10% após a passagem do primeiro mês e mais 10% após a passagem do segundo mês:

$$\text{Parcela Z(Após 1 mês)} = Z + 10\% \text{ de } Z = Z + \frac{10}{100}\,Z = 1{,}1\,Z$$

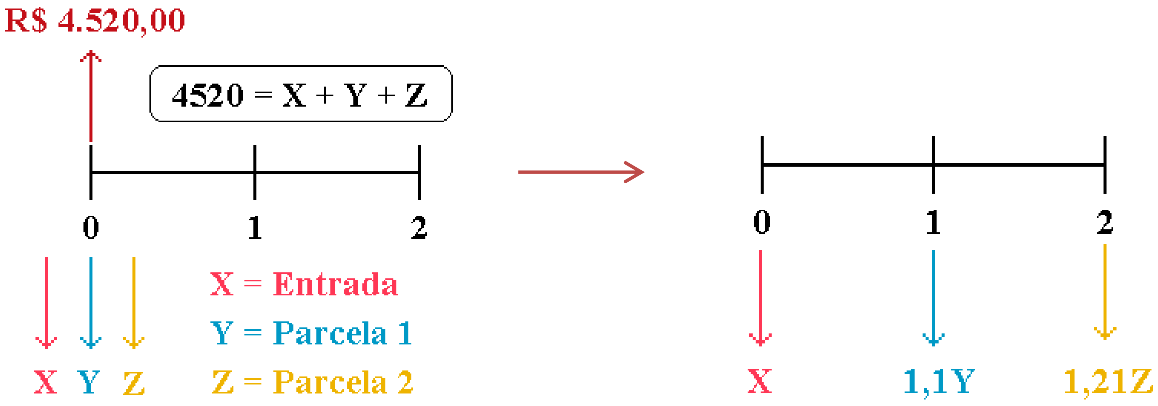
$$\text{Parcela Z(Após 2 meses)} = 1{,}1Z + 10\% \text{ de } 1{,}1Z = 1{,}1Z + \frac{10}{100}\,(1{,}1)Z = 1{,}1\,Z + 0{,}11Z = 1{,}21Z$$

Pela fórmula de juros compostos:

$$\text{Montante (M)} = (\text{Capital Inicial}) \times (1 + i)^n$$
$$\text{Parcela Z (Após 2 meses)} = Z \times (1 + 0{,}1)^2$$
$$\text{Parcela Z(Após 2 meses)} = 1{,}21Z$$



Os três pagamentos são:



→ Segundo o enunciado, o valor da entrada é o dobro do valor das parcelas (que são iguais):

$$X = 2\,(1{,}1\ Y) = 2\,(1{,}21\ Z)$$

$$X = 2{,}2\ Y = 2{,}42\ Z$$

$$Y = \frac{X}{2{,}2} \quad Z = \frac{X}{2{,}42}$$

Substituindo os valores na primeira equação:

$$4520 = X + Y + Z$$

$$4520 = X + \frac{X}{2{,}2} + \frac{X}{2{,}42}$$

$$4520 \text{ x } 2{,}42 = 2{,}42X + 1{,}1X + X$$

$$10938{,}4 = 4{,}52X$$

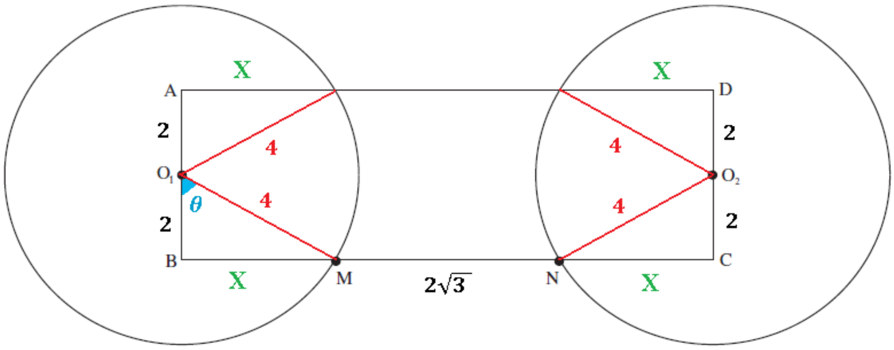
$$X = \frac{10938{,}4}{4{,}52} = 2420$$

A entrada X é R$ 2420,00 e as outras duas parcelas custam metade deste valor, ou seja, R$ 1210,00

$$\text{Soma dos Três Pagamentos} = 2420 + 1210 + 1210 = \text{R\$ } 4840{,}00$$

Resposta: B

Questão 9)

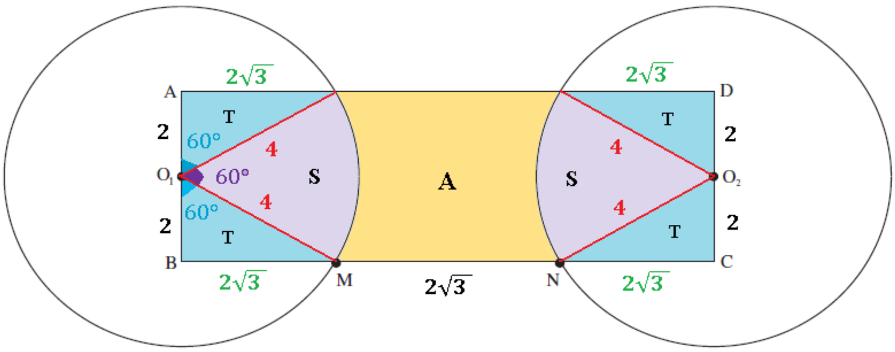


$\rightarrow \Delta O_1BM$

$$4^2 = 2^2 + X^2$$

$$X^2 = 12 \rightarrow X = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{X}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 60°$$



<u>A região entre os círculos (A) corresponde a</u>:

$$A = \text{Área (ABCD)} - [2\ \text{Setores Circulares (S)} + 4\ \text{Triângulos Retângulos (T)}]$$

$$A = 4 \text{ x } 6\sqrt{3} - \left[2 \text{ x} \frac{\pi(4)^2}{6} + 4 \text{ x} \frac{2 \text{ x } 2\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$A = 24\sqrt{3} - \left[\frac{16\pi}{3} + 8\sqrt{3}\right]$$

$$A = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} = 16\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]\ \text{cm}^2$$

<u>Resposta</u>: A

Questão 10)

$$\text{Lara} = \text{L}$$

$$\text{Salomão (S)} = \text{L} + 1$$

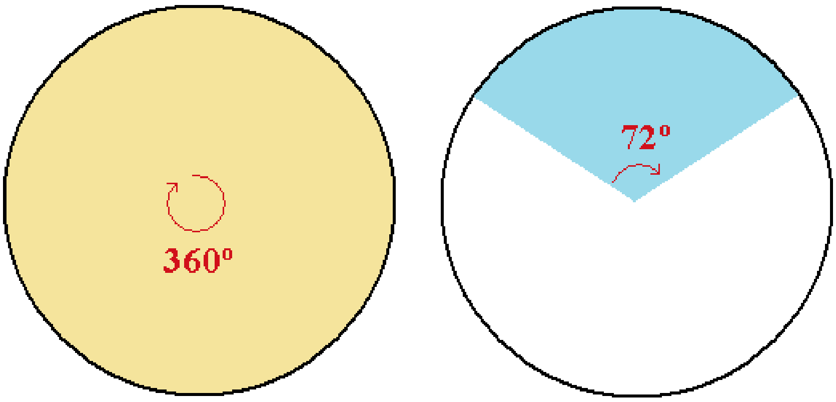
$$\text{Raquel (R)} = \text{S} + 2 = \text{L} + 3$$

$$\text{Gabriel (G)} = 2\text{L} + 1$$

$$\frac{\text{Salomão}}{\text{Total}} = \frac{\text{L} + 1}{\text{L} + \text{L} + 1 + \text{L} + 3 + 2\text{L} + 1} = \frac{\text{L} + 1}{5\text{L} + 5} = \frac{\text{L} + 1}{5\,(\text{L} + 1)} = \frac{1}{5}$$

A quantia destinada a Salomão corresponde à quinta parte do total. Em relação a um gráfico de setores, a quinta parte é:

$$\frac{360}{5} = 72$$



Resposta: D

Questão 11)

$$\text{Distância (D)} = \text{Velocidade(V)}.\,\text{Tempo (T)}$$

→ Aumentando a velocidade:

$$D = (V + 16).\,(T - 2{,}5)$$

$$D = VT - 2{,}5V + 16T - 40$$

$$16T - 2{,}5V = 40$$

→ Diminuindo a velocidade:

$$D = (V - 5).\,(T + 1)$$

$$D = VT + V - 5T - 5$$

$$-5T + V = 5$$

→Sistema:

$$\begin{cases} 16T - 2{,}5V = 40 \\ -5T + V = 5 \end{cases}$$

$$T = 15\text{h} \;\; \text{e} \;\; V = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$D = V.\,T = 80 \text{ x } 15 = 1200 \text{ km}$$

<u>**Resposta**</u>**: A**

Questão 12)

Informações:

- Preço (Hambúrgueres): H
- Preço (Refrigerante): R
- Preço (Doce): D

$$3H + R + D = 11 \quad \text{Equação (1)}$$

$$H + 2R + 3D = 13 \quad \text{Equação (2)}$$

$$3R + 5D = X$$

→ 2 x [Equação (2)] - Equação (1):

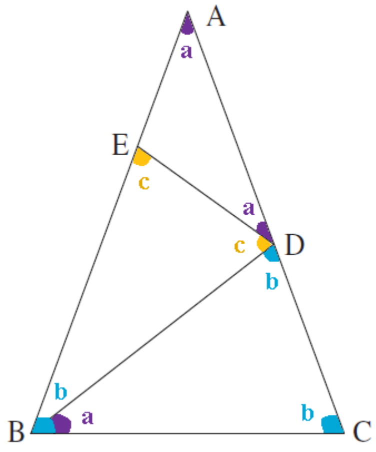
$$2H + 4R + 6D - 3H - R - D = 26 - 11$$

$$3R + 5D = 15 + H$$

O preço $3R + 5D$ é de R$ 15,00 mais o valor de um hambúrguer. Assim $3R + 5D > 15$. A única opção que obedece a essa condição é a letra E.

Resposta: E

Questão 13)



→ $\hat{E}$ é angulo externo do ΔAED:

$$c = 2a$$

→ No ponto D:

$$a + b + c = 180$$

$$a + b + 2a = 180$$

$$3a + b = 180$$

→ΔABC:

$$a + 2b = 180$$

→ Resolvendo o sistema:

$$3a + b = 180$$

$$a + 2b = 180$$

$$a = 36° \text{ e } b = 72°$$

$$A\hat{C}B = b = 72°$$

<u>**Resposta**</u>**: E**

Questão 14)

$$px^2 - 5x + q = 0$$

$$\Delta = 25 - 4pq$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4pq}}{2p}$$

$$a = \frac{5 + \sqrt{25 - 4pq}}{2p} \rightarrow 5 + \sqrt{25 - 4pq} = 2ap$$

$$b = \frac{5 - \sqrt{25 - 4pq}}{2p} \rightarrow 5 - \sqrt{25 - 4pq} = 2bp$$

$$qx^2 - 5x + p = 0$$

$$\Delta = 25 - 4pq$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4pq}}{2q}$$

$$\alpha = \frac{5 + \sqrt{25 - 4pq}}{2q} \rightarrow 5 + \sqrt{25 - 4pq} = 2\alpha q$$

$$\beta = \frac{5 - \sqrt{25 - 4pq}}{2q} \rightarrow 5 - \sqrt{25 - 4pq} = 2\beta p$$

$$2\alpha q = 2ap \rightarrow \alpha = a\,\frac{p}{q}$$

$$2\beta p = 2bp \rightarrow \beta = b\,\frac{p}{q}$$

$$\frac{a.\alpha + \beta}{\beta.b + \alpha} = \frac{a.a\,\frac{p}{q} + b\,\frac{p}{q}}{b\,\frac{p}{q}\,.b + a\,\frac{p}{q}} = \frac{a^2\frac{p}{q} + b\frac{p}{q}}{b^2\frac{p}{q} + a\frac{p}{q}} = \frac{\frac{p}{q}[a^2 + b]}{\frac{p}{q}[b^2 + a]} = \frac{a^2 + b}{b^2 + a}$$

<u>Resposta</u>: C

Questão 15)

$$\left(\frac{x^2 - y^2 + x - y}{x - y} + \frac{x - y}{y - x}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{(x + y)(x - y) + x - y}{x - y} + \frac{x - y}{(-1)(x - y)}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{(x - y)(x + y + 1)}{x - y} - 1\right)^{-2}$$

$$(x + y + 1 - 1)^{-2}$$

$$(x + y)^{-2}$$

$$x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$y = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2}\right)^{2} = \frac{4x2}{2 + 4\sqrt{2} + 4} = \frac{8}{6 + 4\sqrt{2}} = \frac{4}{3 + 2\sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$\frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \text{ x } \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}{9 - 8} = 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Resposta: C

Questão 16)

Informações:

- Nº de pessoas: N

- Nº de bancos: B

$$N = B + 2$$

$$\frac{N}{2} + 2 = B$$

$$\frac{B+2}{2} + 2 = B$$

$$B + 2 + 4 = 2B \ \rightarrow \mathbf{B = 6} \ \ \mathbf{e\ N = 8}$$

No total, poderiam sentar até 60 pessoas. Como 8 pessoas já estão na sala, 52 ainda poderiam entrar e se sentar.

Resposta: D

Questão 17)

Informações:

- Nº de pacotes: X

- 1 dúzia e meia = 18 livros

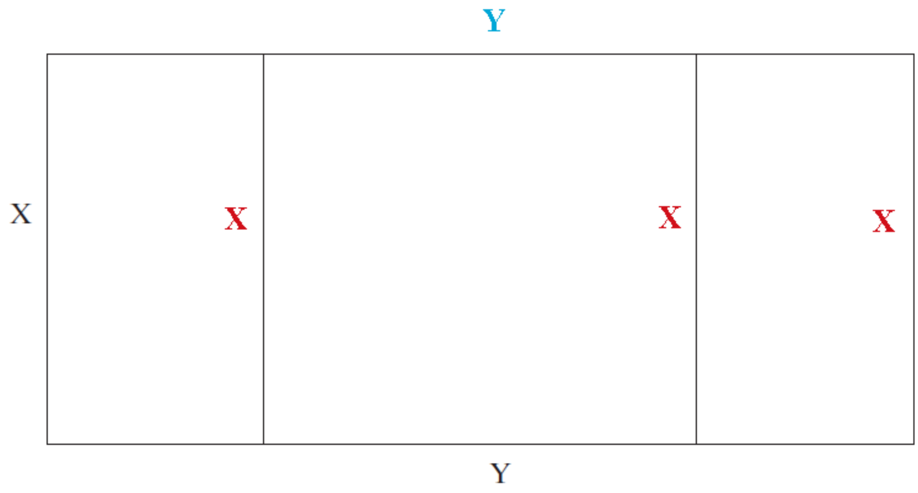
$$\text{Total de Livros} = 18X$$

$$\text{Nº de Livros por aluno} = \frac{18X}{480} = \frac{9X}{240} = \frac{3X}{80}$$

Para que o número de livros por aluno seja inteiro, X deve ser múltiplo de 80. Como o valor deve ser mínimo, X = 80.

Resposta: E

Questão 18)



$$\text{Comprimento Total} = 4X + 2Y = 200$$

$$Y = \frac{(200 - 4X)}{2} = 100 - 2X$$

$$\text{Área} = X.Y$$

$$\text{Área} = X\,(100 - 2X) = 100X - 2X^2$$

$$\text{Área}_{\text{máx}} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\left(100^2 - 4(-2)(0)\right)}{4(-2)} = \frac{-10000}{-8} = 1250\ \text{m}^2$$

<u>Resposta</u>: B

Questão 19)

Informações**:**

- Nº de lados de um polígono: n
- Soma dos ângulos internos de um polígono $= 180\ (n - 2)$

$$n_1 - n_2 = 7$$

$$180(n_1 - 2) + 180(n_2 - 2) = 4140$$

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = 23$$

Sistema:

$$n_1 + n_2 = 27$$

$$n_1 - n_2 = 7$$

$$2n_1 = 34 \rightarrow n_1 = 17$$

$$n_2 = 10\ (\text{Decágono})$$

Resposta: C

Questão 20) ANULADA