

Colégio Militar do Rio de Janeiro

Concurso de Admissão ao 1º ano do Ensino Médio – 2014/2015

Prova de Matemática – 21 de Setembro de 2014

Prova

Resolvida

<http://estudareconquistar.wordpress.com/>

Prova e Gabarito: <http://estudareconquistar.wordpress.com/downloads/>

CMRJ: <http://www.cmrj.ensino.eb.br/>

Setembro 2014

Questão 1)

$$1 \text{ real} = 1 \text{ UVR} = 2750 \text{ cruzeiros reais}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ UVR} \rightarrow 2750 \text{ cruzeiros} \\ X \rightarrow 33550 \end{array}$$

$$X = \frac{33550}{2750} = \mathbf{12,2 \text{ UVR}}$$

Resposta: D

Questão 2)

$$N \rightarrow ABC$$

- A soma dos valores absolutos dos três algarismos é 12:

$$\mathbf{A + B + C = 12} \text{ Equação (1)}$$

- O valor absoluto do algarismo das unidades é o triplo do valor absoluto do algarismo das centenas:

$$\mathbf{C = 3A} \text{ Equação (2)}$$

- O valor absoluto do algarismo das dezenas é a média aritmética entre os valores dos algarismos das unidades e das centenas:

$$\mathbf{B = \frac{A + C}{2}} \text{ Equação (3)}$$

→ Substituindo o valor de B da Equação (3) na Equação (1):

$$A + \frac{A + C}{2} + C = 12$$

$$\mathbf{A + C = 8} \text{ Equação (4)}$$

→ Substituindo o valor da Equação (2) na Equação (4):

$$A + 3A = 8$$

$$4A = 8 \rightarrow A = 2$$

Temos que:

$$A = 2, B = 4, C = 6 \rightarrow N = 246$$

→ O quadrado perfeito mais próximo é 256:

$$16^2 = 256$$

$$246 + 10 = 256 \rightarrow N + \mathbf{10} = 16^2$$

Resposta: E

Questão 3)

Média dos seis primeiros meses

$$\text{Média}_6 = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6}{6} = 3000$$

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 = 18000$$

Média dos sete primeiros meses

$$\text{Média}_7 (7 \text{ primeiros meses}) = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 + D_7}{6} = 3300$$

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 + D_7 = 23100$$

$$18000 + D_7 = 23100$$

$$\mathbf{D_7 = R\$ 5100,00}$$

Resposta: A

Questão 4)

Informações:

- Idade de Felipe (Atual) = F
- Idade de Márcia (Atual) = M

- Há oito anos:

$$\frac{F - 8}{M - 8} = \frac{3}{7}$$

$$7F - 56 = 3M - 24$$

$$\mathbf{7F - 3M = 32}$$

- Atualmente:

$$\frac{F}{M} = \frac{5}{9} \rightarrow \mathbf{F = \frac{5M}{9}}$$

Substituindo o valor de F:

$$7\left(\frac{5M}{9}\right) - 3M = 32$$

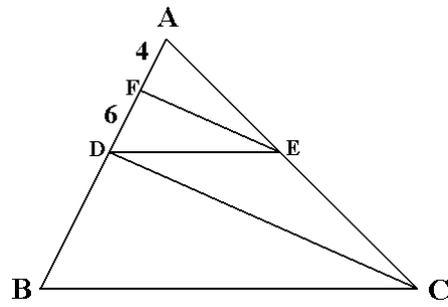
$$35M - 27M = 288 \rightarrow M = 36$$

$$F = \frac{5(36)}{9} = 20$$

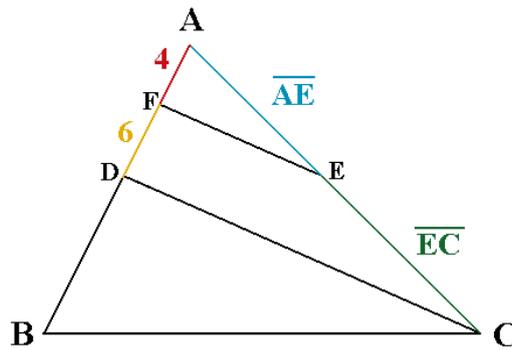
$$\text{Soma das Idades} = M + F = 36 + 20 = 56$$

Resposta: B

Questão 5)

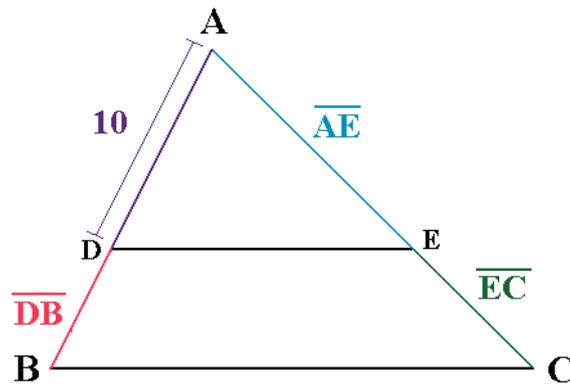


→ Aplicando o Teorema de Tales às paralelas $\overline{EF} // \overline{CD}$



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{4}{6}$$

→ Aplicando o Teorema de Tales às paralelas $\overline{DE} // \overline{BC}$



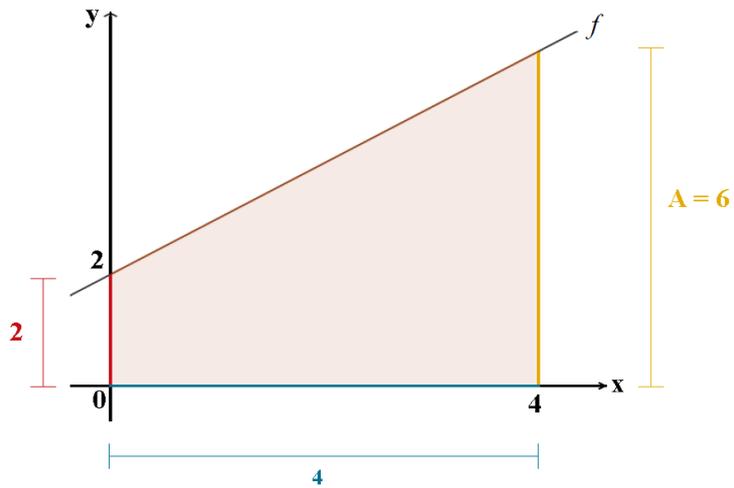
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{10}{\overline{DB}}$$

→ Substituindo o valor de $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{\overline{DB}} \rightarrow \overline{DB} = \frac{60}{4} = 15$$

Resposta: A

Questão 6)

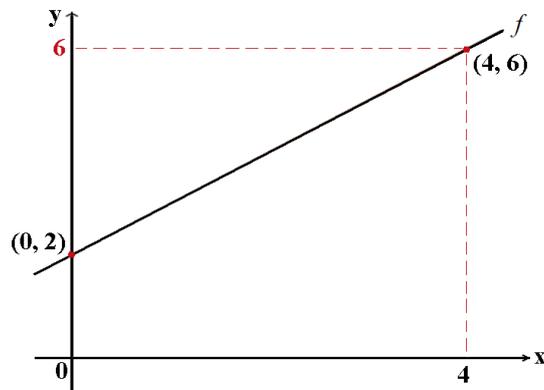


$$\text{Área Trapézio} = \frac{(A + 2)}{2} \times 4 = 16$$

$$A + 2 = 8$$

$$A = 6 \text{ cm}$$

A função passa pelos pontos (0,2) e (4,6)



$$f(x) = ax + b$$

Ponto (0,2):

$$2 = b$$

Ponto (4,6):

$$6 = 4a + b$$

$$6 = 4a + 2$$

$$4a = 4 \rightarrow a = 1$$

A) VERDADEIRO

$$a - b = 1 - 2 = -1$$

B) FALSO

$$a + b = 1 + 2 = 3$$

C) FALSO

$$a = 1 \text{ e } b = 2$$

D) FALSO

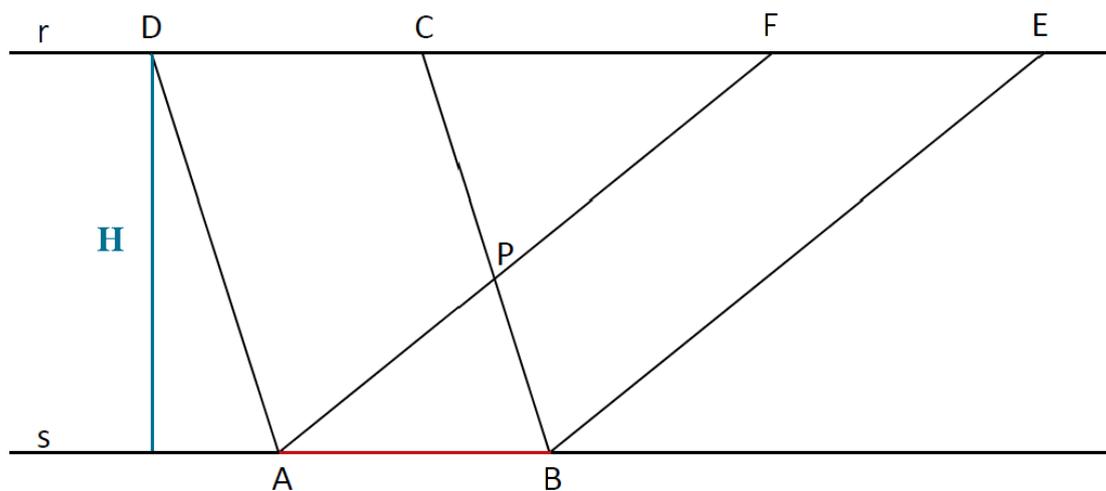
$$b - a = 2 - 1 = 1$$

E) FALSO

$$a + b = 1 + 2 = 3$$

Resposta: A

Questão 7)



Área paralelogramo = Base x Altura

$$\text{Área (ABCD)} = \text{Área (ABEF)} = \overline{AB} \times H$$

$$\text{Área (APCD)} = \text{Área (ABCD)} - \Delta APB$$

$$\text{Área (BEFP)} = \text{Área (ABEF)} - \Delta APB$$

$$\text{Razão} = \frac{\text{Área (APCD)}}{\text{Área (BEFP)}} = \frac{\text{Área (ABCD)} - \Delta APB}{\text{Área (ABEF)} - \Delta APB} = \frac{\text{Área (ABCD)} - \Delta APB}{\text{Área (ABCD)} - \Delta APB} = 1$$

Resposta: B

Questão 8)

Informações:

- Valor da Ficha Azul: $A = R\$ 5,00$
- Valor da Ficha Branca: B
- Valor da Ficha Vermelha: V
- Valor da Ficha Preta: P

- Uma ficha branca vale o mesmo que três fichas azuis ou a metade do valor de uma vermelha:

$$1 B = 3 A = \frac{V}{2}$$

Se a ficha azul vale R\$ 5,00:

$$B = R\$ 15,00 \text{ e } V = R\$ 30,00$$

- Uma ficha preta vale cinco vezes o valor da vermelha:

$$P = 5V$$

$$P = R\$ 150,00$$

$$\text{Aluno} = 2P + 5V + 6B + 10A$$

$$\text{Aluno} = 2 (150) + 5 (30) + 6 (15) + 10 (5) = 300 + 150 + 90 + 50 = R\$ 590,00$$

Resposta: C

Questão 9)

Informações:

- Quantia Inicial de Boente: $B = R\$ 560,00$
- Quantia Inicial de Amanda: $A = R\$ 320,00$
- N° de vezes que Boente acertou o alvo: X
- N° de vezes que Amanda acertou o alvo: Y

Após a série de tiros

$$\text{Boente (Final)} = 560 + 5X - 5Y$$

$$\text{Amanda (Final)} = 320 - 5X + 5Y$$

Se eles terminam a série com o mesmo valor em dinheiro:

$$560 + 5X - 5Y = 320 - 5X + 5Y$$

$$10Y - 10X = 240$$

$$Y = X + 24$$

Resposta: D

Questão 10)

$$\text{Mensalidade (Dez 2013)} = M$$

- Valor da nova mensalidade de acordo com o curso → Aumento de 60%

$$\text{Mensalidade (Jan 2014 – Curso)} = \text{Mensalidade (Dez 2013)} + 60\%$$

$$\text{Mensalidade (Jan 2014 – Curso)} = M + \frac{60}{100}M = 1,6M$$

- Desconto determinado pelo PROCON → Redução de 15%

$$\text{Mensalidade (jan 2014 – PROCON)} = \text{Mensalidade (Jan 2014 – Curso)} - 15\%$$

$$\text{Mensalidade (jan 2014 – PROCON)} = 1,6M - \frac{15}{100}(1,6M) = 1,36M$$

- Desconto por ser professora do CMRJ → Redução de 10%

$$\text{Mensalidade (jan 2014 – CMRJ)} = \text{Mensalidade (Jan 2014 – PROCON)} - 10\%$$

$$\text{Mensalidade (jan 2014 – CMRJ)} = 1,36M - \frac{10}{100}(1,36M) = 1,224M$$

→ A razão entre a mensalidade final calculada para 2014 e a mensalidade de 2013 é de:

$$\frac{\text{Mensalidade (Jan 2014)}}{\text{Mensalidade (Dez 2013)}} = \frac{1,224M}{M} = 1,224 = 1 + 0,224 = 1 + \frac{22,4}{100} = 1 + 22,4\%$$

A mensalidade de 2014 é 22,4% maior do que a de 2013:

$$22 < 22,4 < 23$$

Resposta: E

Questão 11)

$$(x + y) = 2$$

→ Elevando $(x + y)$ ao quadrado:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 4 - 2xy$$

→ Elevando $(x + y)$ ao cubo:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(2)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(2)$$

$$x^3 + y^3 = 8 - 6xy$$

Aplicando a relação:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{8 - 6xy}{4 - 2xy} = \frac{1}{4}$$

$$32 - 24xy = 4 - 2xy$$

$$22xy = 28$$

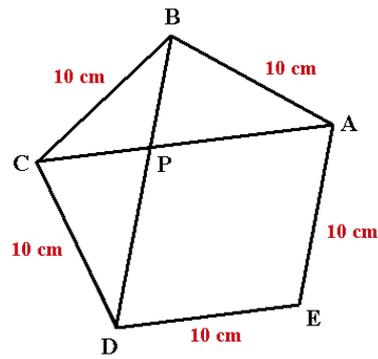
$$xy = \frac{28}{22} = \frac{14}{11}$$

O valor de $(xy)^{-1}$ é:

$$(xy)^{-1} = \frac{1}{xy} = \frac{11}{14}$$

Resposta: A

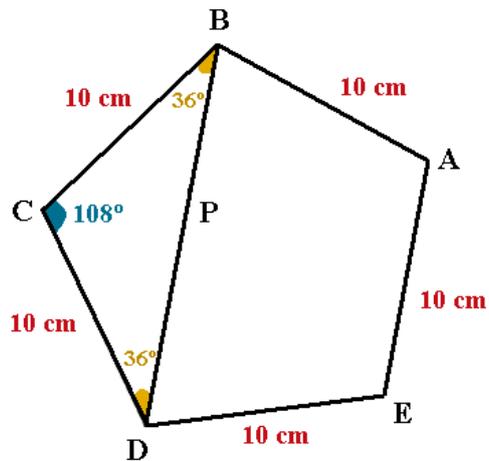
Questão 12)



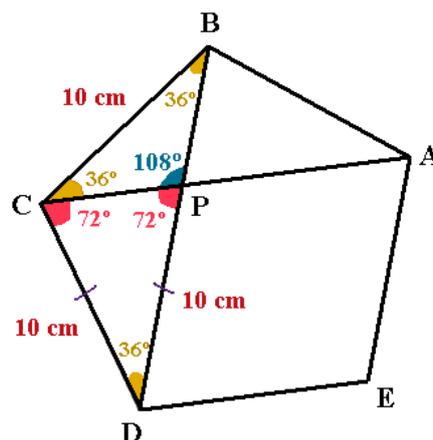
→ O ângulo interno do pentágono regular é de:

$$A_5 = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(5-2)}{5} = 108^\circ$$

→ Sabendo que o $\triangle CBD$ é isósceles e que o ângulo C corresponde ao ângulo interno do pentágono, temos:



→ Traçando a diagonal \overline{AC} geramos dois triângulos isósceles: $\triangle PBC$ e $\triangle PCD$



$$\overline{CP} = \overline{BP}$$

Os triângulos PBC e CBD são semelhantes:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}$$

$$\frac{\overline{DP} + \overline{BP}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}$$

$$\frac{10 + \overline{CP}}{10} = \frac{10}{\overline{CP}}$$

$$10 \overline{CP} + \overline{CP}^2 = 100$$

$$\overline{CP}^2 + 10\overline{CP} - 100 = 0$$

Resolvendo a equação

$$\overline{CP} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4(1)(-100) = 100 + 400 = 500$$

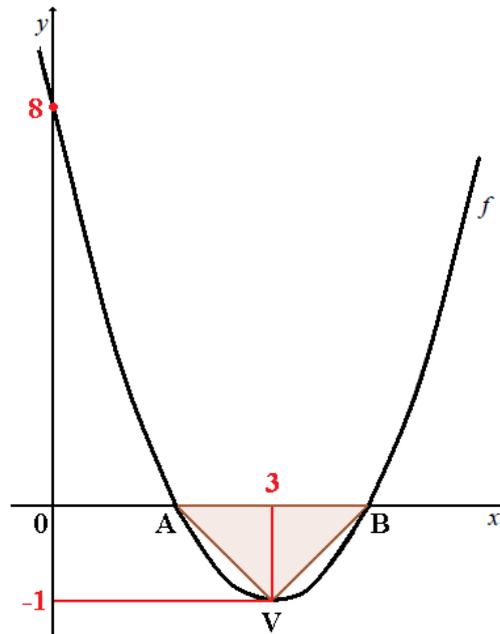
$$\overline{CP} = \frac{-10 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{5}$$

→ O valor de CP deve ser positivo:

$$\overline{CP} = -5 + 5\sqrt{5}$$

Resposta: C

Questão 13)



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ponto (0,8)

$$8 = c$$

Ponto (3, -1) – Vértice da Parábola

Valor de y no vértice

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -1$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(b^2 - 4 \cdot a \cdot 8)}{4a} = \frac{32a - b^2}{4a} - 1$$

$$32a - b^2 = -4a$$

$$b^2 = 36a$$

Valor de x no vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 3$$

$$6a = -b$$

$$b^2 = 6(-b)$$

$$b^2 = -6b \rightarrow \mathbf{b = -6 \ e \ a = 1}$$

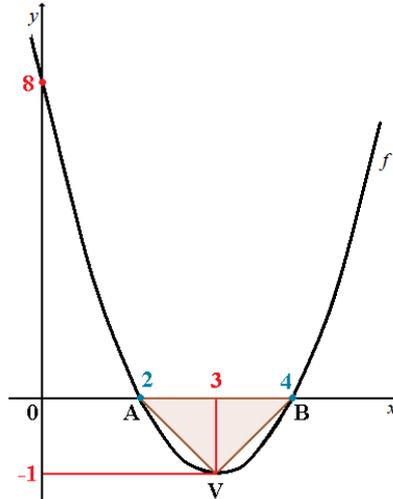
→ As raízes da equação são:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

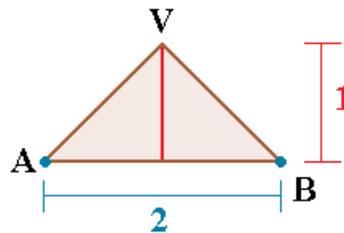
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 4 \text{ e } x_2 = 2$$



Área do Triângulo AVB



$$\text{Área } \Delta AVB = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta: E

Questão 14)

Informações:

- Total de Alunos: N

Divisão Inicial:

$$\frac{342}{N} = X \rightarrow NX = 342$$

Divisão Final:

$$\frac{342}{N-3} = X + 19$$

$$342 = NX + 19N - 3X - 57$$

$$342 = 342 + 19N - 3X - 57$$

$$19N - 3X = 57$$

$$N = 3 + 3 \left(\frac{X}{19} \right) = 3 \left[1 + \frac{X}{19} \right] \rightarrow \text{Múltiplo de 3}$$

Resposta: C

Questão 15)

Informações:

- Desconto: x

- Receita: R

Preço

$$\text{Preço} = \text{R\$ } 8,00 - \text{Desconto}$$

$$\text{Preço} = 8 - x$$

Vendas

$$\text{Vendas} = 400 + \text{Vendas Derivadas do Desconto}$$

$$\text{Vendas} = 400 + 100x$$

Receita

$$\text{Receita} = \text{Preço} \times \text{Vendas}$$

$$R = (8 - x)(400 + 100x)$$

$$R = 3200 + 800x - 400x - 100x^2$$

$$R = -100x^2 + 400x + 3200$$

Resposta: B

Questão 16)

$$(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 0$$
$$x^2 - 2x - 3x + 6 + x^2 - 3x + 1x - 3 + x^2 + 1x - 2x - 2 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(3)(1) = 64 - 12 = 52$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$\alpha = \frac{4 + \sqrt{13}}{3} \text{ e } \beta = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$$

$$\alpha + \beta = \frac{4 + \sqrt{13}}{3} + \frac{4 - \sqrt{13}}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\alpha\beta = \left(\frac{4 + \sqrt{13}}{3}\right)\left(\frac{4 - \sqrt{13}}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} - \frac{13}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Equação:

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$$

$$\frac{1}{(\alpha + \alpha\beta + \beta + 1)} + \frac{1}{(-2\alpha + \alpha\beta - 2\beta + 4)} + \frac{1}{(-3\alpha + \alpha\beta - 3\beta + 9)}$$

$$\frac{1}{(\alpha + \alpha\beta + \beta + 1)} + \frac{1}{(-2[\alpha + \beta] + \alpha\beta + 4)} + \frac{1}{(-3[\alpha + \beta] + \alpha\beta + 9)}$$

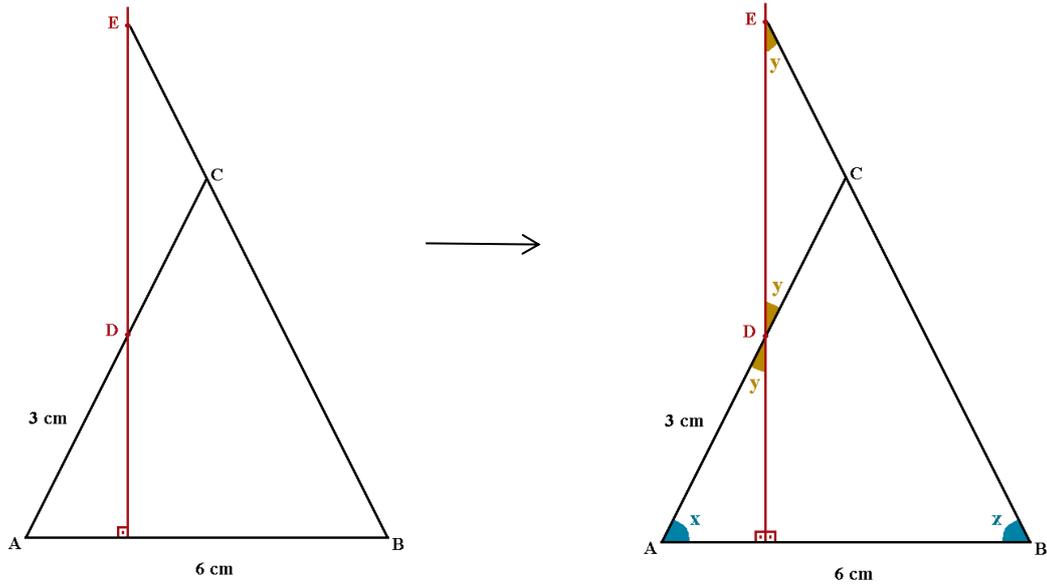
$$\frac{1}{\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 1\right)} + \frac{1}{\left(-2\left[\frac{8}{3}\right] + \frac{1}{3} + 4\right)} + \frac{1}{\left(-3\left[\frac{8}{3}\right] + \frac{1}{3} + 9\right)}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{9}{3} + 1\right)} + \frac{1}{\left(-\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + 4\right)} + \frac{1}{\left(-\frac{24}{3} + \frac{1}{3} + 9\right)}$$
$$\frac{1}{\left(\frac{12}{3}\right)} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{3}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}$$

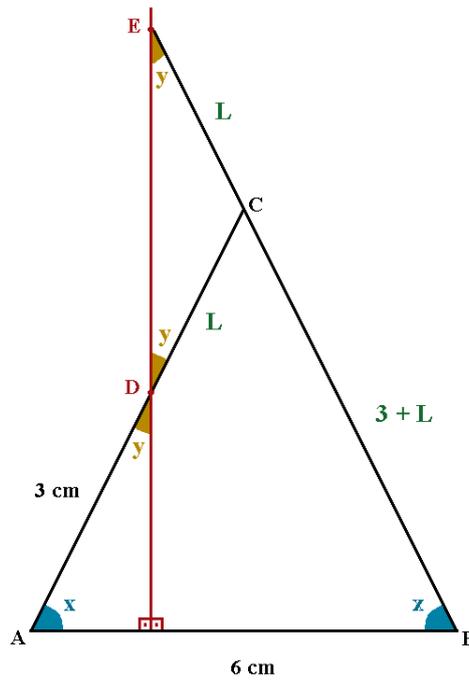
$$\frac{3}{12} - 1 + \frac{3}{4} = \frac{3 - 12 + 9}{12} = 0$$

Resposta: D

Questão 17)



→ Considerando $\overline{CE} = L$ e observando que $\triangle CDE$ é isósceles:



$$\text{Perímetro} = 16 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 3 + L + 3 + L + 6 = 16$$

$$L = \overline{CE} = 2 \text{ cm}$$

Resposta: D

Questão 18)

Radical Duplo

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$
$$C^2 = A^2 - B$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}}$$

Analisando o primeiro radical duplo

$$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{49 + \sqrt{2400}}$$

$$A = 49 \quad B = 2400$$

$$C^2 = A^2 - B = 2401 - 2400 = 1$$

$$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{49+1}{2}} + \sqrt{\frac{49-1}{2}} = \sqrt{25} + \sqrt{24} = 5 + \sqrt{24}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}} = \frac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}$$

Analisando o segundo radical duplo

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}}$$

$$A = 5 \quad B = 24$$

$$C^2 = A^2 - B = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

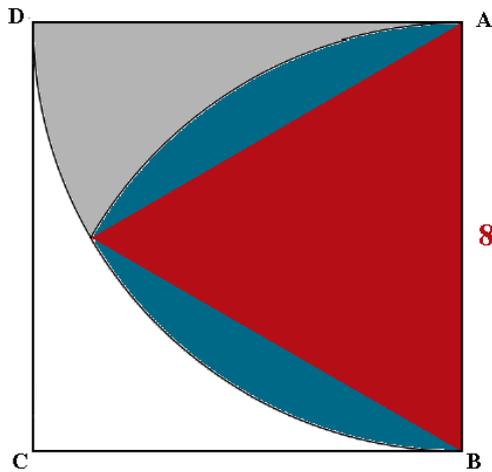
$$\frac{1}{\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}} = \frac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{24}}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Resposta: E

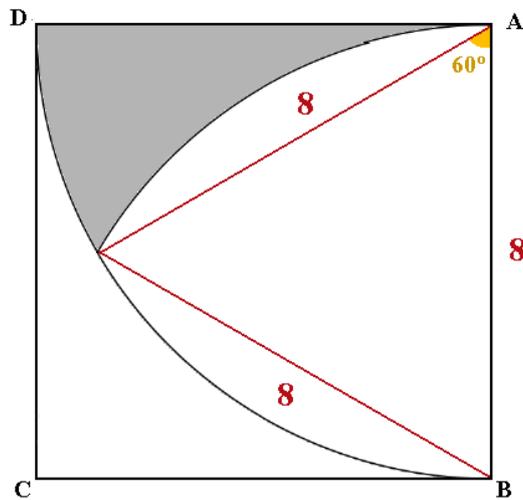
Questão 19)

Analisando apenas o arco BD



O arco BD é composto pela região pintada de vermelho (triângulo), duas áreas azuis e uma cinza. A região cinza corresponde à metade da área hachurada que desejamos encontrar.

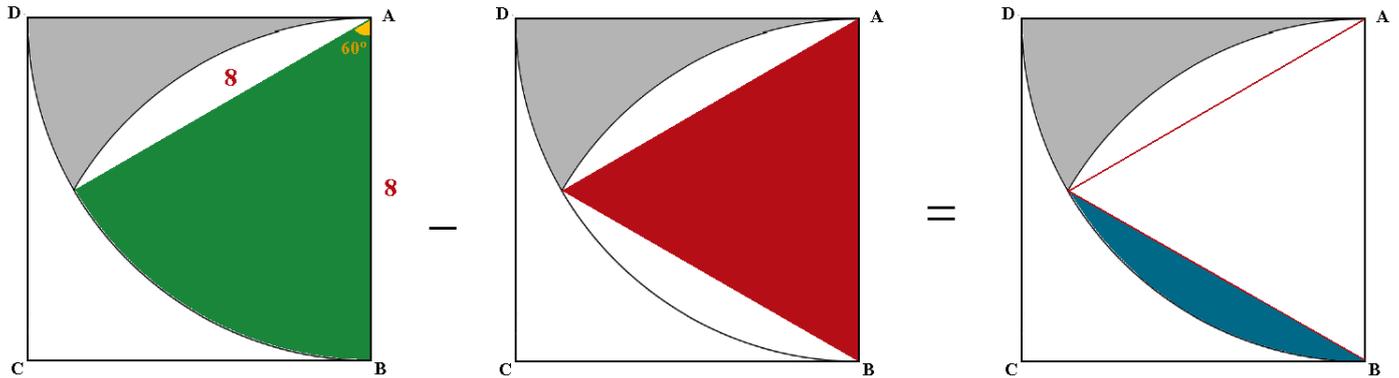
Área Vermelha → Triângulo equilátero



$$\text{Área Vermelha} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Área Azul

A área azul pode ser encontrada a partir da diferença entre o setor circular verde e a área vermelha encontrada anteriormente:



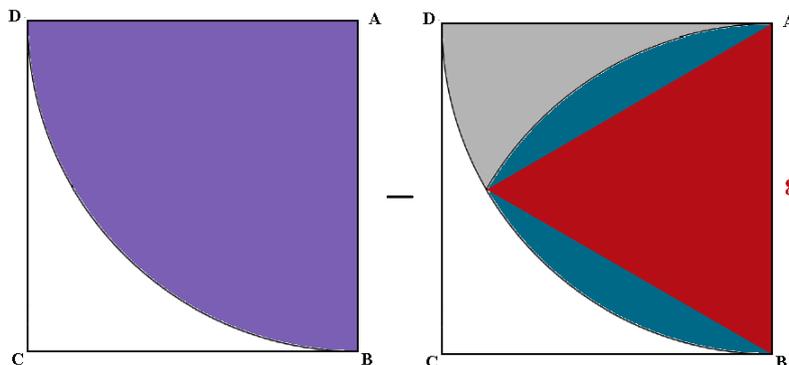
$$\text{Área Azul} = \text{Área Verde} - \text{Área Vermelha}$$

$$\text{Área Azul} = \text{Setor Circular } (60^\circ) - \text{Área do Triângulo}$$

$$\text{Área Azul} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3}$$

Área Cinza

A área cinza corresponde a todo o arco BD menos a área vermelha e duas regiões azuis



$$\text{Área Cinza} = \text{Arco BD} - [\text{Área Vermelha} + 2 \times \text{Área Azul}]$$

$$\text{Área Cinza} = \frac{\pi r^2}{4} - 16\sqrt{3} - 2 \times \left[\frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3} \right]$$

$$\text{Área Cinza} = 16\pi - 16\sqrt{3} - 2 \times \left[\frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3} \right] = 16\pi - 16\sqrt{3} - \frac{64\pi}{3} + 32\sqrt{3} = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3}$$

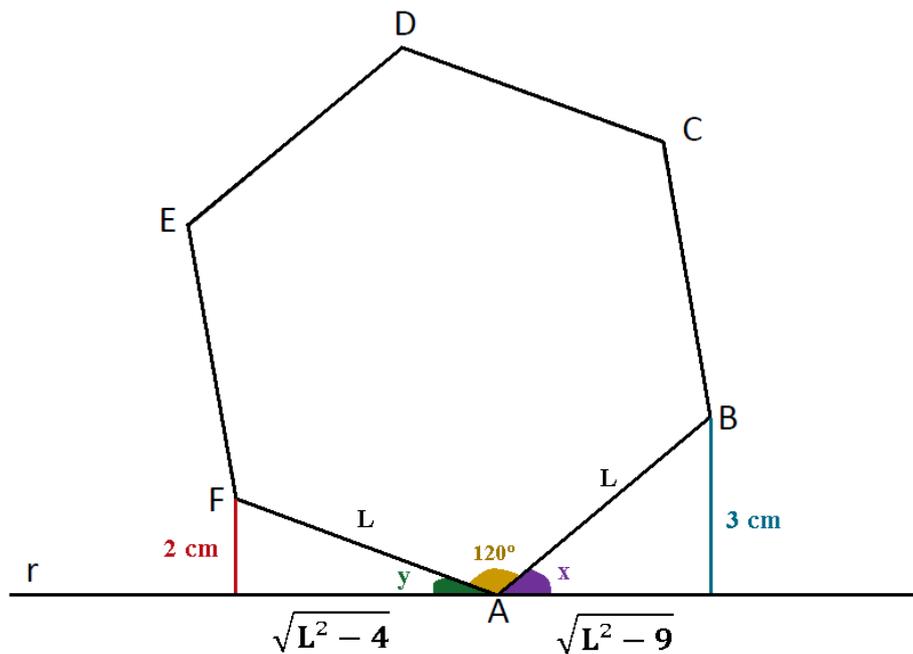
Área Hachurada

$$\text{Área Hachurada} = 2 \times \text{Área Cinza}$$

$$\text{Área Hachurada} = 2 \times \left(16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \right) = 32\sqrt{3} - \frac{32\pi}{3} = 32 \left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right] \text{ cm}^2$$

Resposta: B

Questão 20)



$$\begin{aligned} x + y + 120^\circ &= 180^\circ \\ x + y &= 60^\circ \end{aligned}$$

$\cos(x) = \frac{\sqrt{L^2 - 9}}{L}$	$\cos(y) = \frac{\sqrt{L^2 - 4}}{L}$
$\text{sen}(x) = \frac{3}{L}$	$\text{sen}(y) = \frac{2}{L}$

$$\cos(x + y) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{L^2 - 9}}{L} \cdot \frac{\sqrt{L^2 - 4}}{L} - \frac{3}{L} \cdot \frac{2}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{L^2 - 9} \cdot \sqrt{L^2 - 4}}{L^2} - \frac{6}{L^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{L^2 - 9} \cdot \sqrt{L^2 - 4}}{L^2} = \frac{1}{2} + \frac{6}{L^2}$$

$$\frac{\sqrt{L^2 - 9} \cdot \sqrt{L^2 - 4}}{L^2} = \frac{L^2 + 12}{2L^2}$$

$$\sqrt{L^2 - 9} \cdot \sqrt{L^2 - 4} = \frac{L^2 + 12}{2}$$

Elevando os dois lados ao quadrado

$$\sqrt{L^2 - 9} \cdot \sqrt{L^2 - 4} = \frac{L^2 + 12}{2}$$

$$(L^2 - 9) \cdot (L^2 - 4) = \frac{(L^2 + 12)^2}{4}$$

$$L^4 - 9L^2 - 4L^2 + 36 = \frac{L^4 + 24L^2 + 144}{4}$$

$$4L^4 - 52L^2 + 144 = L^4 + 24L^2 + 144$$

$$3L^4 = 76L^2$$

$$L^2 = \frac{76}{3}$$

$$\text{Área do Hexágono} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\left(\frac{76}{3}\right)\sqrt{3}}{2} = 38\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Resposta: D